الحكومة المصرية — وزارة المعارف العمومية

مراقبة التعليم الفنى

كتاب
الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

تأليف

شارلس سميث

المدرس بكلية سدنى سكس بكمبردج

وترجمة

محمد عبيد افندى

مدرس الترجمة بمدرسة المعلمين الخديوية سابقا

والآن ناظر مدرسة بنى سويف الابتدائية

الجزء الأول

راجعه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة

الطبعة الرابعة

بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٣٤٣ هـ ١٩٢٤ م

الحكومة المصرية — وزارة المعارف العمومية

مراقبة التعليم الفنى

كتاب

الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

تأليف

شارلس سميث

المدرس بكلية سدنى سكس بكمبردج

وترجمة

محمد عبيد افندى

مدرس الترجمة بمدرسة المعلمين الخديوية سابقا

والآن ناظر مدرسة بنى سويف الابتدائية

الجزء الأول

راجعه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة

قد ترجم هذا الكتاب ونشر باذن من الخواجات مكملان وشركائه لميتد بلوندره

الطبعة الرابعة

بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٣٤٣ هـ ١٩٢٤ م

مبـاحث الجزء الأول

من كتاب الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

صحيفة

بســم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وجميع الأنبياء والمرسلين .

الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

الجزء الأول

الفصل الأول

(١ ــ تعاريف) ـ (القطاع المخروطى) هو منحن ترسمه نقطة متحركة فى مستو مشتمل على نقطة ثابتة ومستقيم ثابت بحيث تكون النسبة بين بعديها عن النقطة والمستقيم المذكورين ثابتة

النقطة الثابتة تسمى (بورة المنحنى) والمستقيم الثابت يسمى (الدليل) والنسبة الثابتة تسمى (الاختلاف المركزى)

وسنبين فيما بعد أننا لو قطعنا مخروطا دائريا قائما بمستو فالقطاع الحادث هو دائما قطاع مخروطى مطابق للتعريف السابق وعند ما درست خواص هذه المنحنيات فى أول الأمر كان البحث فيها باعتبارها قطاعات مخروط

اذا كان الاختلاف المركزى أصغر من الوحدة سمى المنحنى (قطعا ناقصا) واذا كان مساويا لها سمى (قطعا مكافئا) واذا كان أكبر منها سمى (قطعا زائدا)

٢ ــ والغرض وهو معرفة الخواص الهندسية الشهيرة للنحنيات ولنبدأ بايجاد وضع المنحنيات المختلفة وشكلها

النظرية الأولى ــ كيفية ايجاد نقط تقاطع منحن معلوم بورته ودليله واختلافه المركزى بخط مستقيم مار بالبورة وعمودى على الدليل

لنفرض ان ب هى بورة المنحنى ، ى ىَ هو الدليل

ثم نرسم ن ن ن َ عمودا على الدليل ومارا بالبورة ب فيقطع الدليل فى نقطة و
ثم نأخذ نقطة ا على المستقيم ب و بحيث تكون نسبة ب ا الى ا و مساوية للاختلاف المركزى للمنحنى فتكون نقطة ا واقعة على المنحنى

ثم نقسم و ب بنقطة خارجة مثل نقطه ا َ بحيث يكون

ب ا َ : ا َ و = ب ا : ا و

واذن تكون ا َ أيضا واقعة على المنحنى

شكل ١

شكل ٢

وتكون نقطة ا َ واقعة على امتداد الخط و ب اذا كان ب ا أصغر من ا و أى اذا كان المنحنى قطعا ناقصا (شكل ١) وتكون نقطة ا َ واقعة على امتداد الخط ب و اذا كان ب ا أكبر من ا و أى اذا كان المنحنى قطعا زائدا (شكل «٢»)

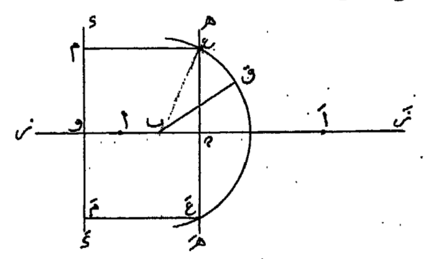
واذا فرضنا فى كل من الحالتين أنّ الاختلاف المركزى يقرب من الوحدة شيأً فشيأً فان بعد نقطة ا َ من البورة يزداد شيأً فشيأً الى مالا نهاية وحينئذ تكون احدى النقط التى يقطع فيها خط ن ن َ منحنى القطع المكافئ الذى بورته نقطة ب ودليله ى ى َ هى على بعد لانهاية له من نقطة ب فيتضح اذن أن العمود النازل من بورة المنحنى على الدليل يقطع المنحنى فى نقطتين ويكونان فى جهة واحدة من الدليل اذا كان المنحنى قطعا ناقصا وفى جهتين متقابلتين منه اذا كان قطعا زائدا وكذلك العمود النازل من بورة القطع المكافئ على الدليل لا يقطع المنحنى الا فى نقطة واحدة على بعد محدود من البورة

٣ — النظرية الثانية — كيفيـة ايجاد نقط تقاطع القطاع المخروطى المعلوم بورته ودليله واختلافه المركزى مع مستقيم مواز للدليل

لذلك نفرض ب بورة المنحنى ، ى ى َ الدليل

ثم نرسم ن ب ن َ عمودا على الدليل من البورة ب فيقطعه فى نقطة و ثم نفرض نقطة ما على ن ب ن َ كنقطة ن ونرسم منها المستقيم هـ ن هـ َ موازيا للدليل

ثم نركز بالبرجل فى نقطة ب ونرسم دائرة نصف قطرها مساو للمستقيم ب ق بحيث تكون النسبة بين ب ق وبين ن و مساوية للاختلاف المركزى فيقطع محيط هذه الدائرة المستقيم هـ هـ َ فى نقطتى ع ، ع َ فتكون هاتان النقطتان واقعتين على المنحنى



لأنه اذا كان ع م ، ع َ م َ عمودين على الدليل يحدث أن

ع م = ن و = ع َ م َ

وبناء عليه يكون ب ع : ع م = ب ع َ : ع َ م َ = ب ق : ن و
وسنبرهن فى البند السادس على أن محيط الدائرة المرسومة بالطريقة المذكورة يقطع المستقيم هـ هـ َ بشرط أن تكون نقطة ن واقعة بين ا ، ا َ فى حالة ما اذا كان المنحنى قطعا ناقصا وأن لا تكون واقعة بين ا ، ا َ إذا كان قطعا زائدا .

وحيث ان ب ع = ب ع َ ، و ب ن عمود على ع ع َ فيلزم أن يكون ع ن مساويا للمستقيم ن ع َ .

ويقال ان المنحنى (متماثل) بالنسبة لمستقيم معلوم اذا كانت كل نقطة من نقط المنحنى تناظرها نقطة أخرى منه بحيث يكون الوتر الواصل بين النقطتين عمودا على المستقيم المفروض ومنصّفا به والمستقيم المفروض يسمى (محور المنحنى)

(وإذن فالمنحنى متماثل بالنسبة للعمود النازل من البورة على الدليل) ولذلك سمى هذا المستقيم محور المنحنى

ونقطة تقابل المحور بالمنحنى تسمى (رأسا)

وبناء عليه فنقطتا ا ، اَ في البند الثانى هما رأسان للمنحنى .

وقد يسمى المستقيم ا اَ المنتهى برأسى المنحنى محور المنحنى

٤ — اذا فرضنا بالبند الثانى أن نقطة حـ هي منتصف ا اَ يحدث

ب ا : ا و = ب اَ : اَ و

∴ ب ا : ا و = ب ا + ب اَ : ا و + اَ و

= ب اَ — ب ا : اَ و — ا و

شكل ١

شكل ٢

وبناء عليه ففى القطع الناقص (شكل ١)

ب ا : ا و = ٢ حـ اَ : ٢ حـ و = ٢ حـ ب : ٢ حـ ا

وفى القطع الزائد (شكل ٢)

ب ا : ا و = ٢ حـ ب : ٢ حـ ا = ٢ حـ ا : ٢ حـ و

وعليه يحدث فى كلا المنحنيين

حـ ب : حـ ا = حـ ا : حـ و = ب ا : ا و

ومنه يحدث أيضا

حـ ا^{2} = حـ ب . حـ و

وكذلك حـ ب : حـ و = حـ ب^{2} : حـ ا^{2}

= ب ا^{2} : ا و^{2}

ولو فرضنا أن الاختلاف المركزى لمنحن مساو للنسبة هـ : ١ بحيث يكون ب ا : ا و = هـ : ١ وبناء على ذلك يكون ب ا = هـ . ا و فيمكن اختصار الارتباطات السابقة ووضعها كما يأتى

حـ ب = هـ . حـ ا ، حـ ا = هـ . حـ و

، حـ ب . حـ و = حـ ا^{2} ، حـ ب = هـ^{2} . حـ و

(مسألة ١) اذا أخذت نقطتان على قطاع مخروطى متساويتا البعد عن بورة فانه يطلب البرهنة على أن المستقيم الواصل بينهما مواز للدليل وأن البعدين البوريين لهاتين النقطتين متساويا الميل على المحور

(مسألة ٢) اذا علم الدليل لقطاع مخروطى وعلمت نقطتان من نقط المنحنى المذكور فأثبت أن البورة يلزم أن تكون واقعة على محيط دائرة ثابتة

(مسألة ٣) عين بورة قطاع مخروطى معلوم دليله وثلاث نقط من نقط المنحنى وكم منحنيا يمكن رسمها بحيث توفى الشروط المعلومة

(مسألة ٤) اذا كان محيط دائرة يمر بنقطة ثابتة ويقطع مستقيما ثابتا ويصنع معه زاوية معلومة فأثبت أن مركز الدائرة يكون واقعا على منحنى قطع زائد ثابت

(مسألة ٥) ب عبارة عن بورة قطاع مخروطى ، ع نقطة من نقطه والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنصفة للمستقيم ب ع هو قطاع مخروطى اختلافه المركزى كالاختلاف المركزى للمنحنى المفروض وبورته نقطة ب ودليله واقع فى منتصف البعد بين ب ودليل المنحنى الأول

(مسألة ٦) اذا فرضنا أن ب بورة قطاع مخروطى ، ع أى نقطة من نقطه فالمطلوب ايجاد المحل الهندسى لنقطة مثل ن تقسم ب ع بحيث تكون النسبة ب ن : ب ع ثابتة

(مسألة ٧) أثبت أن المنحنيين اللذين بورتهما واحدة ودليلهما واحد لا يتقاطعان

(مسألة ٨) عين الدليل لمنحن معلوم بورته واختلافه المركزى ونقطتان من نقطه وفى كم وضعا يمكن أن يوجد الدليل

(مسألة ٩) عين بورة منحن معلوم دليله والاختلاف المركزى ونقطتان من نقطه وفى كم وضعا يمكن أن توجد البورة

(مسألة ١٠) أثبت أن نسبة طول الوتر البورى لأى منحن الى ضعف البعد بين منتصف هذا الوتر والدليل تساوى الاختلاف المركزى للمنحنى

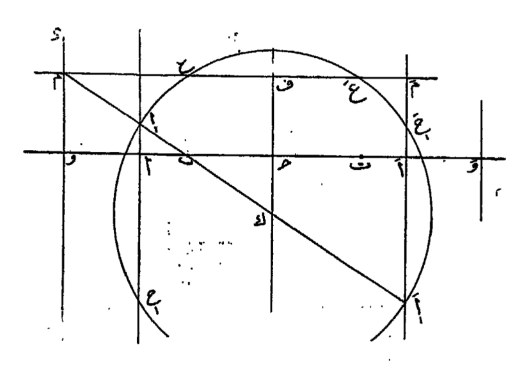
٥ — النظرية الثالثة — كيفية ايجاد نقط تقاطع منحن معلوم بورته والدليل والاختلاف المركزى مع أى مستقيم مواز للمحور

لنفرض أن نقطة ب هى بورة القطاع ، د دَ هو الدليل ثم نعين رأسى المنحنى وليكونا ا ، اَ وننصف ا اَ فى نقطة حـ

ثم نفرض م مَ موازيا للمحور ويقطع الدليل فى نقطة م

ثم نبحث عن نقط تقاطع م مَ مع المنحنى

نصل م ب ونمده على استقامته فيقطع المستقيمين المرسومين من ا ، اَ موازيين للدليل فى نقطتى أ ، أَ على التناظر



فينتج من تشابه المثلثات

ب أ : أ م = ب ا : ا و

، ب أَ : أَ م = ب اَ : اَ و = ب ا : ا و

∴ ب أ : أ م = ب أَ : أَ م

واذن لو رسمنا دائرة قطرها أ أَ واخذنا ن نقطة مّا على المحيط فانه يحدث

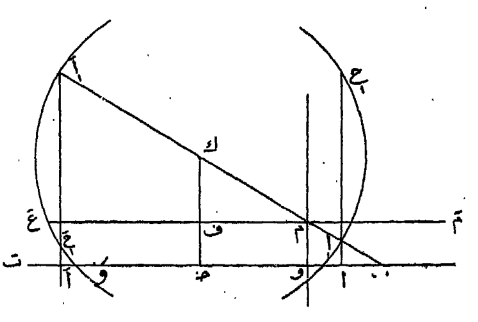
ب ن : ن م = ب أ : أ م = ب ا : ا و

ثم اذا فرض أن المستقيم م مَ يقطع الدائرة فى نقطتى ع ، عَ يحدث

ب ع : ع م = ب عَ : عَ م = ب ا : و ا

فبما أنّ عَ ع م عمود على الدليل فتكون ع ، عَ نقطتين من نقط المنحنى

فلو فرضنا أن ك هى مركز الدائرة تكون هـذه النقطة هى منتصف ا ا١ ويكون المستقيم المرسوم من نقطة ك موازيا للدليل متساوى البعد عن ا ا١ ، ا١ ا١



وحينئذ يمر بنقطة ح التى هى وسط ا ا١ ولكنه واضح أن ك ح عمود على ع عَ وإذن فهو منصف له فى نقطة ولتكن ف

وبناء عليه فالنقطة التى هى منتصف ع عَ واقعة على المستقيم المرسوم من نقطة ح موازيا للدليل

فيتضح اذن (أن المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم المرسوم من ح موازيا للدليل) وهذا المستقيم هو بناء على ذلك محور أيضا للمنحنى

فاذا كان المحور عموديا على الدليل سمى (محورا قاطعا) واذا كان موازيا له سمى (محورا مزاوجا)

٦ — اذا فرضنا فى البند السابق أن محيط الدائرة يقطع المستقيم ا ا١ فى نقطة ج١ ويقطع المستقيم ا١ ا١ فى نقطة جَ١ يكون كل من ا١ جَ١ ، ج١ ا١ موازيا للمستقيم ا ا١ حيث ان الزاويتين ا١ جَ١ ا١ ، ا ج١ ا١ قائمتان

وفى حالة القطع الناقص (شكل ١) يبعد ع عَ عن مركز الدائرة أكثر من أ حَ أو أَ ح حيث إن نقطة أ ونقطة أَ واقعتان فى جهة واحدة من م وبناء عليه يكون ع عَ أصغر من أ حَ أى أن ع عَ أصغر من ا اَ ومنه يستنتج أن القطع الناقص واقع كله بين المستقيمين ا أ ، اَ أَ

اذا كانت ع نقطة مّا على منحنى القطع الناقص ، ع م هو العمودى على الدليل فحيث ان ع واقعة بين المستقيمين ا أ ، اَ أَ فيلزم أن يكون ع م أصغر من اَ و وعليه يكون ب ع أصغر من ب اَ

ومن ذلك يتضح أن كل نقطة من نقط منحنى القطع الناقص تبعد عن البورة بمسافة محدودة وبناء عليه فالقطع الناقص عبارة عن منحن بيضاوى مقفـــل

ولو رسمنا ع حـ عَ موازيا للدليل مع فرض أن نقطتى ع ، عَ فى وضعين بحيث ان ب ع = ب عَ = هـ × حـ و فان ع , عَ تكونان نقطتين من نقط منحنى القطع النــاقص وأنهما نهايتا المحور المزاوج

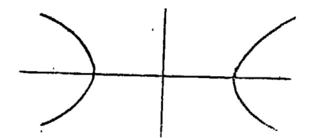
وفى حالة القطع الزائد (شكل ٢) يكون ع عَ أقرب الى مركز الدائرة من كل من أ حَ ، أَ ح لأن م واقعة بين أ ، أَ

وعليه يكون ع عَ أكبر من ا اَ ومنه يستنتج أن منحنى القطع الزائد واقع كله خارج المســتقيمين ا أ ، اَ أَ وحيث ان م واقعة داخل الدائرة فيكون م مَ قاطعا للدائرة دائما فى نقطتين حقيقيتين وواضح أيضا أن ع عَ يتزايد الى مالانهاية بازدياد و م وحينئذ فمنحنى القطع الزائد عبارة عن منحن مشتمل على فرعين منفصل أحدهما عن الآخر كما فى الشكل الآتى

٧ — المنحنيات ذات المركز

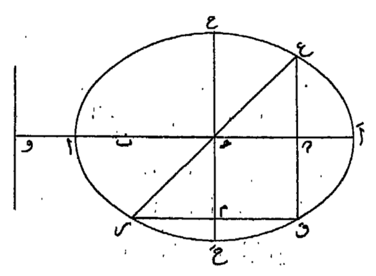
لنفرض ع أى نقطة على منحنى قطع زائد أو قطع ناقص . ثم نرسم منها موازيا للدليل فيقطع ا اَ فى ن ويقطع المنحنى فى نقطة ثانية مثل ق

وبمقتضى النظرية الثانية يحدث أن ع ن = ن ق كما فى النظرية الثانية ثم نرسم من نقطة ق مستقيما موازيا للمستقيم ا اَ فيقطع المنحنى فى ر ويقطع المستقيم المرسوم من ح موازيا للدليل فى نقطة م . فبمقتضى النظرية الثالثة يحدث أن ق م = م ر (بمقتضى النظرية الثالثة)



وحيث ان ع ق = ٢ ع ن وأن ق ر = ٢ ق م = ٢ ن ح

فينتج ان ع ح ر مستقيم وأن ح ر = ع ح



واذن فلو كانت ع نقطة مّا على منحنى قطع ناقص أو قطع زائد ومددنا خط ع ح على استقامته الى نقطة ر بحيث يكون ح ر = ع ح فتكون

نقطة ر واقعة أيضا على المنحنى وتكون نقطة ح منصــفة لجميع الأوتار التى تمر بها ولذلك سميت نقطة ح (مركز المنحنى)

ويسمى منحنى القطع الناقص ومنحنى القطع الزائد (منحنيين ذوى مركز) لتمييزهما من منحنى القطع المكافئ الذى لا مركز له أو لأن مركزه بعيــد عن البورة بعدا لا نهاية له

(ملحــوظة) — يمكن اعتبار منحنى القطع المكافئ الوضع النهائى لمنحنى قطع ناقص أو زائد ومن المفيد أن تستنتج من أى خاصة من خواص منحنى القطع الناقص أو القطع الزائد الخاصة المناظرة لهـا فى القطع المكافئ فى حالة ما اذا كانت خواص هــذين المنحنيين غير متحدة تمـام الاتحاد والأفضــل تأجيل ذلك الى أن ندرس الخواص الهندسية للقطع المكافئ فى الفصل التالى

٨ — النظرية الرابعة — كيفية اثبات أن المنحنى ذا المركز له بورتان ودليـــلان

لذلك نثبت أولا كما فى البند الخامس أن منحنى القطع الناقص أو منحنى القطع الزائد متماثل بالنسبة للمستقيم المرسوم من نقطة ح موازيا للدليل

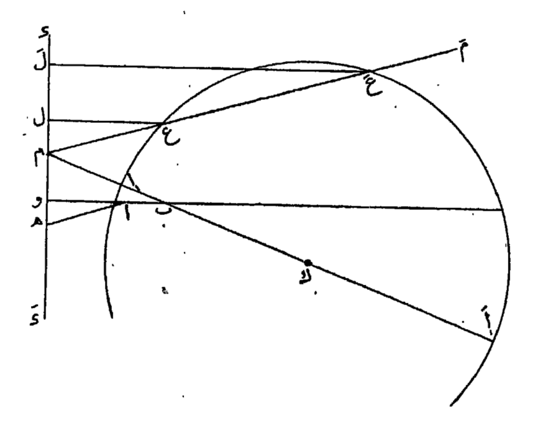
فينتج من ذلك أننا اذا أخذنا نقطتين على المحور القاطع مثــل بَ ، وَ بحيث يكون ح بَ = ب ح ، وَ ح = و ح فتكون لنقطة بَ نفس الخواص التى لنقطة ب بالنسبة للمنحنى

وعليــه تكون نقطة بَ بورة أخرى للمنحنى ويكون الدليــل المناظر لهــا هو المستقيم المرسوم من وَ موازيا للدليل الأصلى

فيتضح اذن (أن كلا من منحنيى القطع الناقص والقطع الزائد له بورتان ودليـــلان)

٩ ــ النظرية الخامسة ــ كيفية ايجاد نقط تقاطع مستقيم معلوم مع منحن معلوم بورته ودليله واختلافه المركزى

نفرض أن ب هى بورة المنحنى ٯ ء و ءَ هو الدليل



ونفرض ان م مَ هو المستقيم المعلوم القاطع للدليل فى نقطة م

ثم نأخذ نقطة ا على المستقيم ب و بحيث يكون ب ا : ا و مساويا للاختلاف المركزى المعلوم ثم نرسم ا هـ موازيا للمستقيم م مَ فيقطع الدليل فى نقطة هـ

ثم نصل ب م ونقسمه فى الداخل والخارج فى نقطتى إ ٯ إَ بنسبة ب ا : ا هـ فاذا رسمنا حينئذ دائرة قطرها إ إَ وكانت ن نقطة على المحيط فتكون نسبة ب ن الى ن م = ب إ الى إ م

ثم نفرض أن محيط الدائرة يقطع م مَ فى نقطتى ع ، عَ فتكون كل من ع ، عَ نقطة من نقط المنحنى

ثم نرسم ع ل ، عَ لَ عمودين على الدليل

فحيث ان ع واقعة على محيط الدائرة التى قطرها إ إَ يحدث

ب ع : ع م = ب إ : إ م = ب ا : ا هـ

∴ ب ع : ب ا = ع م : ا هـ

لكن من تشابه المثلثين ل ع م ، و ا هـ يكون

ع م : ا هـ = ع ل : ا و

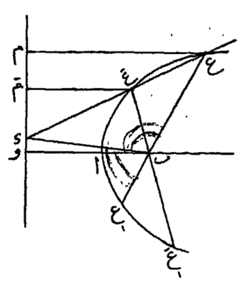
وحينئذ يكون ب ع : ا ب = ع ل : ا و

ومن ذلك يتضح أن نقطة ع وكذلك عَ واقعتان على المنحنى

ويجب أن نلاحظ أنه فى منحنى القطع النـاقص ومنحنى القطع المكافئ تكون النقطتان إ ، إَ وكذلك النقطتان ع ، عَ واقعتين فى جهة واحدة من م أى فى جهة واحدة من الدليل وفى منحنى القطع الزائد تكون النقطتان ع ، عَ فى جهــة واحدة من الدليــل اذا كان ب ا أصــغر من ا هـ وفى جهتــين مختلفتين منه اذا كان ب ا أكبر من ا هـ ومع أن ب ا > ا و لا يستنتج من ذلك أن ب ا > ا هـ

و يجب أن يلاحظ أيضا أنه اذا تغير اتجاه الوتر بحيث يقرب ا هـ من التساوى بخط ب ا شيأ فشيأ فان البعد ب إَ يأخذ فى الازدياد بلاحدٍ وكذلك البعد م عَ . فاذا تحوّل اتجاه الوتر الى أن صار ا هـ = ب ا تكون احدى نقط تقاطع م مَ بالمنحنى على بعد لانهائى من الدليل

١٠ ــ النظرية السادسة ــ اذا قطع مستقيم منحنيا بورته ب فى نقطتى ع و عَ وقطع الدليل فى نقطة د يكون ب د متساوى الميل على كل من ب ع ، ب عَ



وللبرهنة على ذلك نصل ب ع ، ب عَ ، ب د ونرسم ع م ، عَ مَ عمودين على الدليل ثم نمد كلا من ع ب ، عَ ب على استقامته ليقطع المنحنى فى نقطتين أخريين مثل ع١ ، عَ١ على التناظر فبمقتضى التعريف يحدث

ب ع : ع م = ب عَ : عَ مَ

∴ ب ع : ب عَ = ع م : عَ مَ

لكن من تشابه المثلثين م ع د ، مَ عَ د يحدث

ع م : عَ مَ = ع د : عَ د

وحينئذ يكون ب ع : ب عَ = ع د : عَ د

ومنه ينتج أن د ب منصف للزاوية عَ ب ع١ بشرط أن نقطتى ع ، عَ يكونان فى جهة واحدة من د وينتج أيضا أن د ب منصف للزاوية ع ب عَ بشرط أن يكون ع ، عَ فى جهتين متقابلتين بالنسبة للدليل ولا تتوفر الحالة الاخيرة الا اذا كان المنحنى قطعا زائدا

نتيجة ١ — الخط المستقيم لايقطع المنحنى الا فى نقطتين

لاننا لو فرضنا أن ء ع عَ ع مستقيم فبما ان النقط ع ، عَ ، ع″ واقعة على المنحنى ء ب فيلزم أن يصنع المستقيم زوايا متساوية مع ب ع ، ب عَ ، ب ع″ وهذا مستحيل

نتيجة ٢ — اذا فرض أن ع ب ع١ ، عَ ب ع١َ وتران بوريان لمنحن فان المستقيمين ع عَ ، ع١ ع١َ يتقابلان على الدليل وكذلك ع ع١َ ، عَ ع١ يتقابلان على الدليل

وبرهان ذلك أنه اذا فرض أن المستقيم ع عَ يقطع الدليل فى نقطة ء فيكون ء ب منصفا للزاوية ع ب ع١َ كما تقدم اثباته ويكون المستقيم الواصل بين نقطة ب ونقطة تقاطع ع ع١َ مع الدليل منصفا أيضا للزاوية ع ب ع١َ ومنه يستنتج أن ع عَ ، ع١ ع١َ يلزم أن يقطعا الدليل فى نقطة واحدة

وكذلك يتقاطع المستقيمان ع ع١َ ، عَ ع١ مع الدليل في نقطة مثل ءَ بحيث يكون ءَ ب منصفا للزاوية ع١ ب ع١َ

ويتضح من ذلك أن المستقيمين ء ب ، ءَ ب متعامدان

(مسألة ١) اذا علمت بورة منحن وعلمت نقطتان من محيطه فاثبت أن الدليل يلزم ان يمر باحدى نقطتين ثابتتين

(مسألة ٢) المطلوب ايجاد الدليل لمنحن معلوم بورة من بوره وثلاث نقط على المنحنى وأثبت أن ثلاثة منحنيات على الأقل من الأربعة المنحنيات التى توفى هذا الشرط يلزم أن تكون قطاعات زائدة

(مسألة ٣) المطلوب ايجاد الدليل لمنحن معلوم بورته واتجاه المحور القاطع ونقطتان على المنحنى

(مسألة ٤) لو فرضنا ع ، عَ نهايتى وتر بورى لمنحن ، ں نقطة أخرى على المنحنى وأن ع ں ، عَ ں يقطعان الدليل المطابق فى نقطتى

ى ، ىَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ى ىَ يقابل زاوية قائمة رأسها بورة المنحنى

(مسألة ٥) مفروض أن ع ب عَ وتر بورى لمنحن وأن ا نقطة الرأس لهذا المنحنى وأن ع ا ، عَ ا يقطعان الدليل المناظر فى نقطتى ى ، ىَ على التناظر والمطلوب البرهنة على أن ى و . ىَ و = و ب²

مع فرض و موقع الدليل .

(مسألة ٦) لو فرضنا ع نقطة مّا على منحن بورته ب ، ا نقطة رأس المنحنى وأن ع ا يقطع الدليل المناظر فى نقطة ى ثم رسمنا ى ن موازيا للمحور القاطع ليقطع امتداد ع ب فى ن فانه يطلب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو منحنى قطع مكافئ

(مسألة ٧) المطلوب ايجاد بورة منحن معلوم منه الدليل ونقطة الرأس ونقطة أخرى على المنحنى

(مسألة ٨) المطلوب ايجاد الدليل لمنحن معلوم منه البورة ونقطة الرأس ونقطة أخرى على المنحنى

(مسألة ٩) لو فرضنا ان ع ، عَ نهايتا وترمركزى لمنحن بورته نقطة ب فأثبت أن ب ع + ب عَ ثابت

(مسألة ١٠) لو فرضنا أن منحنيين لهما دليل مشترك فانه يطلب البرهنة على أن نقط تقاطعهما يلزم أن تكون واقعة على محيط دائرة مركزها واقع على المستقيم الواصل بين بورتيهما

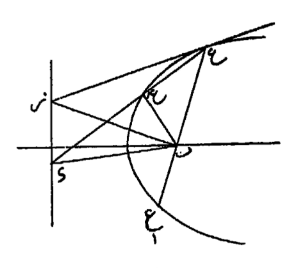
١١ — تعاريف — اذا فرضنا مستقيما مارا بنقطتين متجاورتين ع ، عَ من منحن وان نقطة عَ تتحرك على المنحنى وتقرب من نقطة ع الثابتة شيئا فشيئا بحيث يكون المستقيم مارا بالنقطتين دائما فالوضع النهائى

للمستقيم حينما تتقارب نقطة عَ من نقطة ع الى أن تتحد معها يسمى (مماسا) للمنحنى فى نقطة ع وكذلك المستقيم المرسوم من نقطة على المنحنى كنقطة ع مثلا عمودا على المماس فى هذه النقطة يسمى (عمودى المنحنى) فى نقطة ع

١٢ — النظرية السابعة — الجزء من مماس المنحنى المحصور بين نقطة التماس والدليل يقابل زاوية قائمة رأسها البورة المناظرة للدليل

للبرهنة على ذلك نفرض أن ء ع عَ يقطع قطاعا مخروطيا فى نقطتى ع ، عَ ويقطع الدليل فى نقطة ء بفرض أن ع ، عَ فى جهة واحدة من الدليل . فاذا فرض أن نقطه ب بورة المنحنى المناظرة لهذا الدليل ومد ع ب على استقامته ليقطع المنحنى فى نقطة ثانية مثل ع١ يمكننا أن نبرهن كما تقدم فى بند ١٠ أن المستقيم ء ب منصف للزاوية عَ ب ع١

ثم نفرض أن نقطة عَ تتحرك فى جهة ع حتى تنطبق عليها ونفرض أن ع ز هو الوضع النهائى للمستقيم ع عَ أعنى الوضع النهائى للمماس فى ع فيحدث أن ء ب يصنع دائما زاويتين متساويتين مع عَ ب ، ب ع١



وحيئئذ اذا تحركت نقطة عَ فى جهة ع وانطبقت عليها وتحركت نقطة ء حتى تصل الى نقطة ن فان المستقيم ب ن يصنع زاويتين متساويتين مع ع ب ، ب عٔ وبناء عليه تكون كل من الزاويتين ن ب ع ، ن ب عٔ قائمة

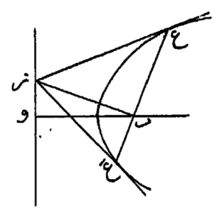
واذاً فالمستقيم ن ع يقابل زاوية قائمة رأسها نقطة ب

وبالعكس اذا رسمنا ب ن عمودا على ب ع ليقطع الدليل فى نقطة ن يكون ع ن هو المماس فى نقطة ع

١٣ — النظرية الثامنة — المماسان فى نهايتى وتر بورى لقطاع مخروطى يتقاطعان على الدليل المناظر للبورة

للبرهنة على ذلك نفرض ع ب عَ أى وتر بورى لمنحن بورته ب ثم نرسم ب ن عموديا على ع ب عَ فيقطع الدليل المناظر للبورة ب فى نقطة ن

فحيث ان كلا من الزاوية ن ب ع ، الزاوية ن ب عَ قائمة فيكون كل من ن ع ، ن عَ مماسا للمنحنى



فيتضح اذن أن المماسين فى نقطتى ع ، ع يتقاطعان على الدليل

(وبالعكس) اذا رسم مماسان لمنحن من نقطة على الدليل فان المستقيم الواصل بين نقطتى التماس يمر بالبورة المناظرة للدليل

[لنفرض أن ع م ، ع َ م َ عمودان على الدليل فتكون النقط م ، ن ، ب ، ع واقعة على محيط دائرة وحينئذ تكون زاوية ب ن ع ⋛ زاوية م ن ع على حسب ما اذا كان ب ع ⋛ ع م

وكذلك تكون الزاوية ب ن ع َ ⋛ الزاوية م َ ن ع َ على حسب ما اذا كان ب ع ⋛ ع م

وحينئذ تكون الزاوية ع ن ع َ ⋛ زاوية قائمة على حسب ما اذا كان ب ع ⋛ ع م]

(وفى حالة القطع الزائد يشترط أن تكون النقطتان ع ، ع َ واقعتين فى جهة واحدة من الدليل)

تعريف — الوتر البورى لأى منحن العمودى على المحور القاطع يسمى (بالوتر البورى العمودى)

ويتضح مما تقدّم أن المماسين المرسومين من نهايتى الوتر البورى العمودى يتقاطعان فى نقطة و

١٤ — النظرية التاسعة — اذا رسم ق م عمودا على الدليل من نقطة مثل نقطة ق وفرضنا ب البورة المناظرة لهذا الدليل يكون ب ق : ق م أكبر من الاختلاف المركزى اذا كانت النقطة المفروضة خارجة عن المنحنى ويكون أصغر منه اذا كانت فى داخل المنحنى

وتكون أى نقطة مفروضة كنقطة ق خارجة عن المنحنى اذا كان المستقيم ب ق قاطعا للمنحنى فى نقطة واحدة ليس الا بين ب ، ق

لنفرض ق نقطة خارجة عن المنحنى ونفرض أن ب ق يقطع المنحنى فى نقطة ع ثم نرسم ع ه عمودا على الدليل ونصل ب م فيقطع ع ه فى نقطة ء الواقعة بين ع ، ه

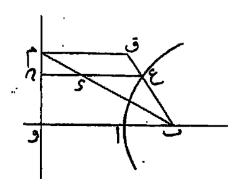
فحيث ان ى ع موازٍ للمستقيم ن م فيحدث

ب ق : ق م = ب ع : ع ى

ولكن ب ع : ع ى > ب ع : ع ن

∴ ب ق : ق م > ب ع : ع ن

أى أكبر من الاختلاف المركزى للمنحنى



ولو فرضنا أن ق ، ب فى جهتين متقابلتين بالنسبة للدليل وفرضنا ان ب ق يقطع المنحنى فى نقطتين مثل ع ، عَ وأن نقطة ع واقعة بين ب ، ق فينتج من ذلك أننا اذا رسمنا عَ نَ عمودا على الدليل ومددنا ب م على استقامته فان ب م يقطع عَ نَ فى نقطة ىَ (بين) عَ ، نَ ومنه يستنتج كما تقدّم أن

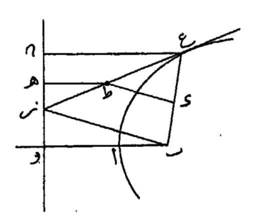
ب ق : ق م > ب عَ : عَ نَ

ويمكن البرهنة بمثل هذه الطريقة على أنه اذا كانت نقطة ق واقعة داخل المنحنى يكون ب ق : ق م أصغر من الاختلاف المركزى للمنحنى

١٥ — النظرية العاشرة — اذا فرضنا ط نقطة مّا على مماس للمنحنى فى نقطة ع ورسمنا هـ ط عمودا على الدليل ، ط ى عمودا على البعد البورى ب ع تكون النسبة ب ى : ط هـ مساوية للاختلاف المركزى

لنفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الدليل فى نقطة ن ثم نرسم ع ة عمودا على الدليل

فيكون ن ب عمودا على ب ع وحينئذ يكون موازيا للمستقيم ط ى



وبناء عليه يكون ب ى : ب ع = ن ط : ن ع

= ط هـ : ع ة

واذا ب ى : ط هـ = ب ع : ع ة

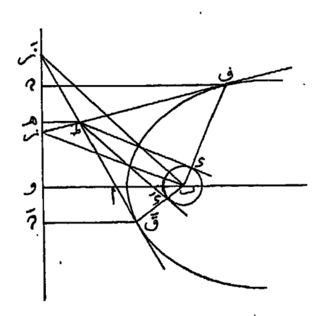
= ب ا : ا و

١٦ — النظرية الحادية عشرة — كيفية رسم مماسات لمنحن من نقطة خارجة

لنفرض ط هى النقطة الخارجة ثم نرسم ط هـ عمودا على الدليل ثم نركز فى نقطة ب ونرسم دائرة نسبة نصف قطرها الى ط هـ كنسبة ب ا الى ا و فحيث أن نقطة ط واقعة خارج المنحنى فيكون ب ط : ط هـ > ب ا : ا و وحينئذ يكون ب ط > نصف قطر الدائرة فيمكننا اذن رسم مماسين حقيقيين للدائرة ولنفرض أنهما ط ى ، ط ىَ.

ثم نرسم ب ن ، ب نَ موازيين للمستقيمين ط ى ، ط ىَ فيقطعان الدليل فى ن ، نَ على التناظر

ثم نصل ز ط ، زَ ط ونمد ب ى ، ب ىَ على استقامتهما ليقطعا ز ط ، زَ ط فى ق ، قَ على التناظر فيكون ط ق ، ط قَ هما المماسان المطلوبان



ثم نرسم ق ﻫ ، قَ ﻫَ عمودين على الدليل

فحيث ان ب ز مواز للمستقيم ط ى فيحدث

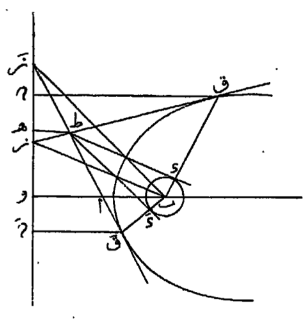
ب ق : ب ى = ز ق : ز ط = ق ﻫ : ط ﻫ

∴ ب ق : ق ﻫ = ب ى : ط ﻫ

= ب ا : ا و [بمقتضى الرسم]

ويتضح اذن أن نقطة ق واقعة على المنحنى وحيث ان الزاوية ز ب ق قائمة فيكون ز ط ق هو المماس المرسوم فى نقطة ق وكذلك يكون زَ ط قَ هو المماس فى نقطة ق

١٧ ــ النظرية الثانية عشرة ــ المطلوب البرهنة على أن المماسين لمنحن المرسومين من نقطة خارجة عنه يقابلان زاويتين متساويتين أو متكاملتين رأساهما احدى البورتين



نفرض ان ط ق ، ط قَ هما المماسان ونفرض أن ط ق ، ط قَ أو امتدادهما يقطعان الدليل فى نقطتى ن ، نَ على التناظر ثم نرسم ط هـ عمودا على الدليل ونرسم ط ى ، ط ىَ عمودين على ب ق ، ب قَ على التناظر

وبمقتضى النظرية الحادية عشرة يحدث

ب ى : ط هـ = ب ا : ا و

= ب ىَ : ط هـ

واذن يكون ب ى = ب ىَ

وينتج من ذلك أن ط واقعة على المنصف الداخلى للزاوية ى ب ىَ واذن تكون واقعة على المنصف الداخلى أو المنصف الخارجى للزاوية ق ب قَ

واذا فرض أن ق ، ق َ فى جهة واحدة من الدليل وان نقطة ط واقعة فى نفس هذه الجهة فواضح أن ب ى ، ب ق تكون فى الجهــة بعينها وكذلك ب ى َ ، ب ق َ واذن يكون ط ب فى هذه الحالة منصفا للزاوية ق ب ق َ

وكذلك اذا فرض أن ق ، ق َ فى جهة واحدة من الدليل وان ط فى الجهة المقــابلة لها يكون ب ى ، ب ق فى جهتين متقابلتين ويكون ب ى َ ، ب ق َ فى جهتين متقابلتين أيضا . وحينئذ يكون المستقيم ط ب فى هــذه الحالة منصفا للزاوية ق ب ق َ ولو فرضنا أن ق ، ق َ فى جهتين متقابلتين من الدليل يكون ب ى ، ب ق فى جهــة واحدة أو فى جهتين متقابلتين على حسب ما اذا كان ب ى َ ، ب ق َ فى جهتين متقابلتين أو فى جهة واحدة وحينئذ فى هذه الحالة أى عند ما تكون النقطتان ق ، ق َ واقعتين على فرعين مختلفين من القطع الزائد يكون المستقيم ط. ب منصفا للزاوية الخارجة ق ب ق َ

واذن لو فرضــنا ط ق ، ط ق َ ممــاسين لمنحن بورته نقطة ب يكون ط ب منصفا للزاوية ق ب ق َ ما لم يكن المنحنى قطعا زائدا ونقطتا ق ، ق َ واقعتين على فرعين مختلفين منه والا كان ط ب منصفا للزاوية الخارجة ق ب ق َ

[يجب على الطالب أن يرسم أشكالا توضح الأحوال المختلفة]

نتيجة ــ اذا كان الممــاسان فى نقطتين من نقط المنحنى مثل ق ، ق متقــاطعين فى نقطة ط وقطع الوتر ق ق َ دليلا فى نقطة ى فان المستقيم ى ط يقابل زاوية قائمة رأسها فى البورة المناظرة لهذا الدليل وللبرهنـــة على ذلك نقول انه يؤخذ مما تقدم أن ب ط منصف للزاوية ق ب ق َ الداخلة أو الخــارجة على حسب ما اذا كانت النقطتان ق ، ق َ فى جهة واحدة أو فى جهتين متقابلتين من الدليل

و يؤخذ من النظرية السادســة أيضا أن ب ء منصف الزاوية ق ب ق الخارجة أو الداخلة على حسب ما اذا كانت ق ، قَ فى جهــة واحدة أو فى جهتين متقابلتين من الدليل .

وحينئذ فالمستقيمان ب ط ، ب ء متعامدان فى كل الأحوال

(مسألة ١) اذا علم الدليل لمنحن والممــاس فى نقطة معلومة على هـــذا المنحنى فأثبت أن المحل الهندسى للبورة المناظرة لهذا الدليل هو محيط دائرة

(مسألة ٢) اذا علمت بورة المنحنى وعلمت نقطتــان منـــه والممــاس فى احدى هاتين النقطتين فالمطلوب ايجاد الدليل المناظر لهذه البورة

(مسألة ٣) اذا علم الدليل لمنحن ونقطتان منه والمماس فى احدى هاتين النقطتين فالمطلوب ايجاد البورة المناظرة لهذا الدليل

(مسألة ٤) ارسم منحنيا معلوما منه البورة والاختلاف المركزى والمماس فى نقطة معلومة

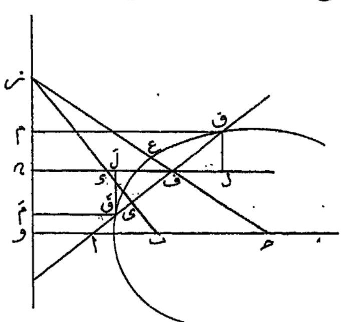
(مسألة ٥) المطلوب ايجاد بورة منحن معلوم منه الدليل والاختــلاف المركزى والمماس فى نقطة معلومة

(مسألة ٦) لو فرضنا أن ع ۞ عمود على المحور القاطع لمنحن من أى نقطة على هذا المنحنى ومددنا ع ۞ على استقامته ليقطع المماس المرسوم من نهاية وتر بورى عمودى فى نقطة ء فأثبت أن ۞ ء = ب ع

١٨ ــ النظرية الثالثة عشرة ــ المحل الهندسى للنقط المنصفة لجملة اوتار متوازية فى منحن هو مستقيم مار بمركز المنحنى

لنفرض ق قَ أحد الاوتار المتوازية ، ف النقطة المنصــفة له ثم نرسم ق م ، قَ مَ ، ف ۞ أعمدة على الدليــل ونرسم ق ل ، قَ لَ عمودين على ۞ ف

فحيث أن ف منصفة للمستقيم ق قَ فهى منصفة أيضا للمستقيم ل لَ
ثم نرسم من البورة ب عمودا على ق قَ فيقابل الدليل المناظر لهذه البورة
فى نقطة ن ويقطع ق قَ فى نقطة ى ويقطع ۃ ف فى نقطة ء



وحينئذ يحدث

ب ق٢ — ب قَ٢ = ى ق٢ — قَ ى٢

= (ى ق + قَ ى) (ى ق — قَ ى)

= ٤ ى ف . ف ق

[لان ى ق + قَ ى = ٢ ف ق ، ى ق — قَ ى = ٢ ى ف]

= ٤ ل ف . ف ء

لان ق ، ل ، ى ، ء واقعة على محيط دائرة

وكذلك اذا رمزنا للاختلاف المركزى لهذا المنحنى بحرف هـ يحدث

ب ق‾٢ = هـ٢ . ق م‾٢ = هـ٢ . ل ۃ‾٢

، ب قَ‾٢ = هـ٢ . قَ مَ‾٢ = هـ١ . لَ ۃ‾٢

وحينئذ يكون $\overline{ب ق}^٢ - \overline{ب ق َ}^٢ = هـ^٢ (\overline{ل ن}^٢ - \overline{ل ن َ}^٢) = ٤ هـ^٢ . ل ف . ف ن$

وعليه يكون ل ف . ف ى = هـ^٢ . ف ل . ف ن

∴ ف ى = هـ^٢ . ف ن

ولكن بمقتضى البند الرابع يحدث ح ب = هـ^٢ . ح و بفرض أن ح مركز المنحنى

وحينئذ يكون ز ف ح خطا مستقيما

ولكن ز نقطة ثابتة لكل الأوتار الموازية للوتر و و َ وحينئذ تكون كل النقط المنصفة لجميع أوتار المنحنى المتوازية واقعة على المستقيم الثابت الواصل بين المركز ونقطة تقاطع الدليل بالعمود النازل من البورة على الأوتار

تعريف — المحل الهندسى للنقط المنصفة لجملة أوتار متوازية فى منحن يسمى (قطرا)

[واضح مما تقدم أن كل أقطار المنحنى عبارة عن مستقيمات مارة بالمركز وحينئذ فأقطار القطع المكافئ مستقيمات تقطع المحور على بعد لانهائى من البورة واذن فهى موازية للمحور ويمكن الحصول على هذه النتيجة أيضا اذا فرضنا أن هـ = ١ فى الارتباط الآتى ف ى = هـ^٢ . ف ن لانه اذا كان ف ى = ف ن يلزم أن تكون النقطتان ز و ن منطبقتين]

نتيجة ١ — اذا فرض أن أحد أقطار المنحنى يقطع المحيط فى نقطة كنقطة ع فيكون المماس فى هذه النقطة موازيا للأوتار التى ينصفها هذا القطر

لانه اذا فرض أن المستقيم المرسوم من نقطة ع موازيا للأوتار التى ينصفها القطر ح ع يقطع المنحنى فى نقطة أخرى مثل نقطة ر تكون النقطة المنصفة للمستقيم ع ر واقعة على ح ع وحينئذ تكون فى نقطة ع وذلك لايتأتى الا بانطباق النقطتين ع و ر

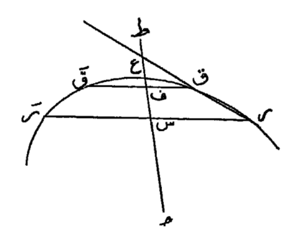
وواضح أن القطرين ا ح ا َ و ع ح ع َ ينصفان الأوتار الموازية للمستقيمين ع ع َ و ا ا َ على التناظر ويستنتج من ذلك اذن أن المماسين فى نقطتى ا و ا َ موازيان للمستقيم ع ح ع َ والمماسين فى نقطتى ع و ع َ موازيان للمستقيم ا ح ا َ

وحيث ان القطر يقطع المنحنى ذا المركز فى نقطتين فينتج أن المماسين فى هذين النقطتين متوازيان

[ويستنتج ذلك مباشرة من ملاحظة أن مركز المنحنى هو النقطة المنصفة لكل الأوتار التى تمر به وذلك لانه لو فرض أن ع ح عَ ، ر ح رَ وتران حيثما اتفق يكون ع ر مساويا وموازيا للمستقيم عَ رَ . وحينئذ لو تحركت نقطة ر فى جهة ع وتحركت تبعا لها نقطة رَ الى عَ يكون المماس فى نقطة ع فى النهاية موازيا للماس فى نقطة عَ]

نتيجة ٢ — المماسان فى نهايتى أى وتر من أوتار المنحنى يتقاطعان على القطر المنصف لهذا الوتر

لنفرض ق قَ ، ر رَ وترين متوازيين فى منحن ونفرض أن النقطتين المنصفتين لهما هما ف ، س فيكون س ف قطرا للمنحنى . ونفرض أن ر ق يقطع س ف فى نقطة ط



وحينئذ يحدث س ط : ف ط = ر س : ق ف

∴ س ط : ف ط = رَ س : قَ ف

وحيث أن رَ س مواز للمستقيم قَ ف فيكون رَ قَ ط خطا مستقيما وبناء عليه فالمستقيمان ر ق ، رَ قَ يتقاطعان على القطر المنصف للوتر ق قَ وذلك صحيح لجميع أوضاع الوتر ر رَ الموازى للوتر ق قَ

ثم نفرض تحرك الوتر ر رَ الى جهة ن نَ حتى ينطبق عليه فيتحرك المستقيمان ر ن ، رَ نَ حتى يصيرا فى النهاية مماسين فى نقطتى ن ، نَ على التناظر.

واذاً فالمماسان فى نقطتى ن ، نَ يتقاطعان على القطر المنصف للوتر ن نَ

(مسألة ١) اذا علم قوس من منحن مرسوم على الورق فالمطلوب ايجاد مركز المنحنى بواسطة المسطرة والبرجل

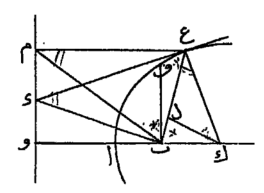
(مسألة ٢) أثبت أن المحور المار بالبورتين أكبر أقطار القطع الناقص وأن المحور المزاوج أصغرها .

(مسألة ٣) أثبت أن المحور المار بالبورتين أطول وتر بورى فى القطع الناقص وأن الوتر البورى العمودى على هذا المحور أقصرها

١٩ — النظرية الرابعة عشرة — اذا تقاطع عمودى المنحنى فى نقطة ع مع المحور القاطع فى نقطة ك فيكون ب ك : ب ع مساويا للاختلاف المركزى لهذا المنحنى .

لنفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الدليل المناظر للبورة ب فى نقطة ى ثم نرسم ع م عمودا على الدليل ونصل ب م

فحيث ان الزاويتين ى ب ع ، ى م ع قائمتان فتكون النقط ى ، ب ، ع ، م واقعة على محيط دائرة



وبناء عليه تكون ∠ ب م ع = ∠ ب ى ع

= الزاوية المتممة للزاوية ب ع ى = ∠ ب ع ك

وكذلك تكون الزاوية ب ع م = الزاوية ع ب ك لأن ع م ، ب ك متوازيان

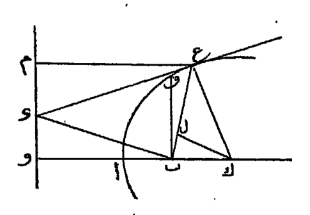
وحينئذ يكون المثلثان ب ع م ، ك ب ع متشابهين ويحدث

ب ك : ب ع = ب ع : ع م = ب ا : ا و

٢٠ — النظرية الخامسة عشرة — اذا تقاطع عمودى المنحنى فى نقطة ع مع المحور القاطع فى نقطة ك يكون مسقط ع ك على ب ع مساويا لنصف الوتر البورى العمودى

للبرهنة على ذلك نرسم ك ل عمودا على ب ع ونرسم ب ف عمودا على ب و فيقطع المنحنى فى نقطة ف وحينئذ يكون ب ف نصف الوتر البورى العمودى وعلينا أن نبرهن على أن ع ل = ب ف

ويمكننا أن نثبت كما تقدّم فى النظرية الرابعة عشرة أن المثلثين ك ب ع ، ب ع م متشابهان



وحينئذ يكون ع ك : ب م = ب ع : ع م

= ب ا : ا و

ولكن حيث ان ⦣ ك ع ل = ⦣ ب م ع = ⦣ و ب م

و ⦣ ك ل ع = ⦣ قائمة = ⦣ ب و م

فيكون المثلثان ك ل ع و ب و م متشابهين

وعليه يحدث ع ل : ب و = ع ك : ب م

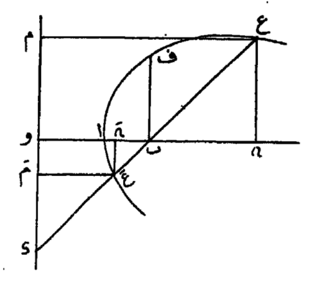
واذا ع ل : ب و = ب ا : ا و

= ب ف : ب و

فيكون ع ل = ب ف = نصف الوتر البورى العمودى

٢١ ـــ النظرية السادسة عشرة ـــ نصف الوتر البورى العمودى وسط توافقى بين جزئى أى وتر بورى

لنفرض أن ع ب عَ أى وتر بورى فى منحنٍ ونفرض أنه هو أو امتداده يقطع الدليل المناظر فى نقطة د ونفرض أن ب ف هو نصف الوتر البورى العمودى ثم نرسم ع م و عَ مَ عمودين على الدليل ونرسم ع ه و عَ هَ عمودين على المحور القاطع



فحيث ان المثلثين ع ب ن ، عَ ب نَ متشابهان فيحدث

ب ع : ب عَ = ب ن : ب نَ

= ع م — ب و : ب و — عَ مَ

ولكن ب ع = هـ . ع م ، ب ف = هـ . ب و

، ب عَ = هـ . عَ مَ

∴ ب ع — ب ف = هـ (ع م — ب و)

، ب ف — ب عَ = هـ (ب و — عَ مَ)

∴ ع م — ب و : ب و — عَ مَ = ب ع — ب ف : ب ف — ب عَ

∴ ب ع : ب عَ = ب ع — ب ف : ب ف — ب عَ

فاتضح من ذلك أن ب ع ، ب ف ، ب عَ تكوّن متوالية توافقية

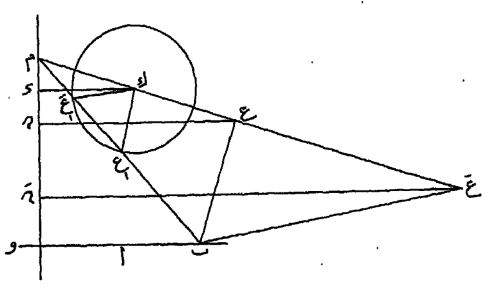
دائرة الاختلاف المركزى

٢٢ — تعريف — الدائرة التى مركزها نقطة مّا فى مستوى منحن والتى نسبة نصف قطرها الى طول العمود النازل من المركز على الدليل مساوية للاختلاف المركزى للمنحنى تسمى (دائرة الاختلاف المركزى) لهذه النقطة

٢٣ — يمكن بواسطة دائرة الاختلاف المركزى ايجاد نقط تقاطع أى مستقيم معلوم مع منحن معلوم بورته ودليله واختلافه المركزى

لنفرض أن المستقيم يقطع الدليل فى نقطة م ثم نرسم دائرة الاختلاف المركزى لنقطة مّا على المستقيم مثل نقطة ك ونصل ب م فيقطع محيط الدائرة فى ع١ ، ع١َ ثم نصل ك ع١ ، ك ع١َ ونرسم ب ع ، ب عَ موازيين

للمستقيمين ك ع١ ، ك عَ١ على التناظر فيقطعا ب م ك فى ع ، عَ على التناظر فتكون ع ، عَ نقطتين على المنحنى



ثم نرسم ع ه ، عَ هَ ، ك ى أعمدة على الدليل

فحيث ان ب ع مواز للمستقيم ك ع١ وكذلك ع ه مواز للمستقيم ك ى

فيحدث ب ع : ك ع١ = ع م : ك م

= ع ه : ك ى

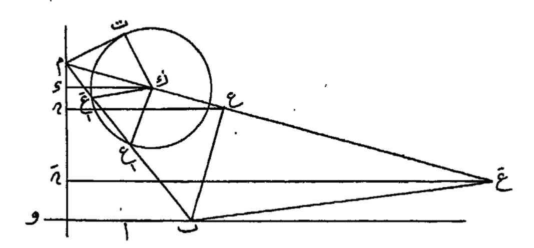
∴ ب ع : ع ه = ك ع١ : ك ى

ولكنه واضح من تعريف دائرة الاختلاف المركزى أن ك ع١ : ك ى يساوى الاختلاف المركزى للمنحنى وحينئذ تكون ع وكذلك عَ نقطتين على المنحنى

٢٤ ــ النظرية السابعة عشرة ــ النسبة بين المستطيلين المكونين من أجزاء وترى منحن متقاطعين وموازيين لمستقيمين ثابتين على التناظر لا تتعلق بوضع نقطة التقاطع

للبرهنة على ذلك نفرض أن أحد الأوتار المار بنقطة ك يقطع المنحنى فى نقطتى ع ، عَ ويقطع الدليل فى نقطة م ونفرض أن المستقيم ب م

الواصل بين البورة ونقطة م يقطع دائرة الاختلاف المركزى لنقطة ك فى ع١ ، ع′١ فيكون ك ع١ ، ك ع′١ موازيين للمستقيمين ب ع ، ب ع′ على التناظر كما تقدم فى بند ٢٣



وحينئذ يكون ع ك : ك م = ب ع١ : ع١ م

، ع′ ك : ك م = ب ع′١ : ع′١ م

∴ ع ك . ع′ ك : ك م٢ = ب ع١ . ب ع′١ : م ع١ . م ع′١

وبناء عليه يكون ع ك . ع′ ك : ب ع١ . ب ع′١ = ك م٢ : م ط٢ مع فرض م ط مماسا من نقطة م لدائرة الاختلاف المركزى لنقطة ك

واذا فرض أن المستقيم ك ع ع′ فى اتجاه ثابت تكون نسبة ك م : ك ى ثابتة وحيث ان نسبة ك ى : ك ط مساوية للاختلاف المركزى للمنحنى فتكون نسبة ك م : ك ط ثابتة وحيث ان الزاوية ك ط م قائمة فتكون النسبة ك م : م ط ثابتة بشرط أن يكون هذا الوتر موازيا لمستقيم ثابت

ولو رسمنا وترا آخر من مركز الدائرة ك ليقطع المنحنى فى نقطتى ن ، ن′ و يقطع الدليل فى نقطة م′ ورسمنا من م′ مماسا لدائرة الاختلاف المركزى

لنقطة ك وليكن المماس مَ طَ ثم وصلنا ب مَ ليقطع محيط الدائرة فى نقطتى ن١ ، ن١َ فانه يحدث ما يأتى كما تقدم

ن ك . نَ ك : ب ن١ . ب ن١َ = كمَ^٢ : مَ طَ^٢

ولكن قد تبين مما تقدم أن النسبة كمَ^٢ : مَ طَ^٢ ثابتة اذا كان الوتر ك ن نَ موازيا لمستقيم ثابت آخر

وكذلك يحدث أن ب ع١ . ب ع١َ = ب ن١ . ب ن١َ ومنه يستنتج أن النسبة ع ك . عَ ك : ن ك . نَ ك ثابتة لجميع أوضاع نقطة ك بشرط أن يكون كل من الوترين موازيا لمستقيم ثابت

مسائل

(١) اذا علمت بورة منحن ودليله ورسم مماسان للمنحنى من نقطة معلومة فالمطلوب البرهنة على أن وتر التماس يمر بنقطة ثابتة

(٢) اذا فرض أن ع ب عَ وتر بورى لمنحن ، ن نقطة أخرى على هذا المنحنى ووصلنا ع ن ، عَ ن ليقطعا الدليل المناظر للبورة ب فى نقطتى ى ، ىَ على التناظر فانه يطلب البرهنة على أن المستطيل ى و . و ىَ ثابت

(٣) اذا فرض أن المماس لمنحن بورته ب فى نقطة ع يقطع المحور القاطع فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن ب ط أكبر ا ومساو ا وأصغر من ب ع على حسب ما اذا كان المنحنى قطعا ناقصا أو قطعا مكافئا أو قطعا زائدا

(٤) اذا فرض أن ع ب ن وتر بورى فى منحن وكانت نقطة ط هى نقطة تقاطع المماس فى نقطة ع بالمستقيم المرسوم من ن عمودا على ع ن فالمطلوب البرهنة على أن الدليل منصف للمستقيم ط ن

(٥) اذا فرض أن ع ب عَ وتر بورى فى منحن وفرض أن هـذا الوتر أو امتـداده يقطع الدليـل فى نقطة ى فالمطلوب البرهنة على أن ى ب وسط توافقى بين ع ى ، عَ ى

(٦) اذا فرض أن ق قَ وتر لمنحن ويقطع الدليل فى نقطة ن ويقطع وتر التماس للماسين المرسومين للمنحنى من نقطة ن فى نقطة ى فالمطلوب البرهنة على أن ن ق ، ن ى ، ن قَ تكوّن متوالية توافقية

(٧) اذا علمت بورتا منحن ذى مركز وعلم الخط الواصل بين نقطتى التماس للماسين المرسومين لهذا المنحنى من نقطة معلومة فالمطلوب ايجاد الدليلين

(٨) اذا علمت بورة المنحنى ودليله والاختلاف المركزى فالمطلوب رسم مماس له مواز لمستقيم معلوم

(٩) مفروض أن العمودى فى نقطة ع لمنحن بورته ب يقطع المحور القاطع فى نقطة حـ ورسم ع م عمودا على الدليل المناظر للبورة ب والمطلوب البرهنة على أن م ب ، ع حـ يتقاطعان على مستقيم ثابت مهما كان وضع نقطة ع على المنحنى

(١٠) اذا رسم مماس لمنحن فى نقطة منه ومددنا الوتر البورى العمودى على استقامته ليقطع المماس ومددنا المماس ليقطع الدليل فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين بعدى نقطتى التقاطع عن البورة مساوية للاختلاف المركزى

(١١) اذا رسم مماسان لمنحن فى نهايتى أى وتر بورى ومددنا الوتر البورى العمودى على استقامته ليقطعهما فى نقطتين فالمطلوب البرهنة على أن نقطتى التقاطع متساويتا البعد عن البورة

(١٢) اذا فرض أن ں ںَ وترما فى منحن مخروطى ويقـابل زاوية معلومة رأسها البورة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة تقـاطع المستقيمين اللذين يمسان المنحنى فى النقطتين البادى ذكرهما هو منحن مخروطى آخر وأن المستقيم ں ںَ يمس منحنيا ثالثا وأن المنحنيات الثلاثة لها بورة مشـتركة ودليل مشترك أيضا

(١٣) معلوم وضع ضلعى مثلث ومعـلوم أن الضلع الثالث يقابل زاوية ثابتة رأسها نقطة ثابتة والمطلوب البرهنة على أن الضلع الثالث دائمـا يمس منحنيا بورته النقطة الثابتة المذكورة

(١٤) اذا رسمنا مماسا لمنحن وأخذنا عليه نقطتى ى ٯ ىَ بحيث ان ى ىَ يقابل زاوية قائمة رأسها بورة المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المماسين الآخرين المرسومين من نقطتى ى ٯ ىَ يتقاطعان على الدليـل المناظر للبورة المذكورة

(١٥) اذا فرض أن ممـاسا لمنحن بورته ب فى نقطة ع يقطع الدليـل فى نقطة ى ويقطع المحور القاطع فى نقطة ط ورسمنا ع م عمودا على الدليل من نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن ب م ممـاس للدائرة ب ى ط

(١٦) اذا فرض أن ب ى عمود على ممـاس لمنحن بورته ب فى نقطة ع وفرض أن ع م عمود على الدليل المناظر لهذه البورة فالمطلوب البرهنة على أن المثلثين ب ى و ٯ ب ع م متشابهان

(١٧) اذا رسم ممـاسان لمنحن فى نهايتى الوتر البورى ع ب عَ وفـرض أنهما يتقاطعان فى نقطة ط وفرض أن نقطتى ع ٯ عَ فى جهتين متقابلتين

من ب فالمطلوب البرهنة على ب ط^{2} $\gtreqless$ ع ب . ب عَ على حسب ماإذا كان المنحنى قطعا ناقصا أو مكافئا أو زائدا

(١٨) اذا فرض أن ع ب عَ وتر بورى فى منحن وفرض أن العمودين فى نقطتى ع 6 عَ يتقابلان فى نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المرسوم من نقطة ك موازيا للمحور القاطع منصف للمستقيم ع عَ

(١٩) اذا فرض أن ع ب عَ وتر بورى لمنحن وفرض أن العمودين فى نقطتى ع 6 عَ يتقابلان فى نقطة ك ثم رسم ك ء عمودا على ع ب عَ من نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن ب ع = عَ ء 6 ب عَ = ع ء

(٢٠) اذا فرض أن عمودَى منحن فى نقطتى ع 6 عَ يقطعان المحور القاطع فى ك 6 كَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن مسقطى ع ك 6 عَ كَ على ع عَ متساويان

الفصل الثـانى

القطع المـكافئ

٢٥ — تعاريف : (القطع المكافئ) هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو يشتمل على نقطة معلومة ومستقيم معلوم بحيث يكون بعدها عن النقطة المعلومة مساويا على الدوام لبعدها العمودى عن المسـتقيم المعـلوم. والنقطة المعلومة تسمى (بورة القطع المكافئ) والمستقيم المعلوم يسمى (الدليل)

النظرية الأولى — كيفية ايجـاد جمـلة نقط على منحنى قطع مكافئ معلوم بورته ودليـــله

نفرض ب بورة القطع المكافئ ، م مَ الدليل

ثم ننزل من ب المستقيم و ب ة عمودا على الدليل فيقطع الدليل فى نقطة و ثم ننصف و ب فى نقطة ا بحيث ان ب ا = ا و فتكون نقطة ا واقعـة على المنحنى

ثم نأخذ أى نقطة على و ب ة مثـل نقطة ة ونرسم منها ل ة لَ عمودا على و ب ة

ثم نركز فى نقطة ب ونرسم دائرة نصف قطرها يساوى و ة فيقطع محيطها المستقيم ل ة لَ فى نقطتى ع ، عَ

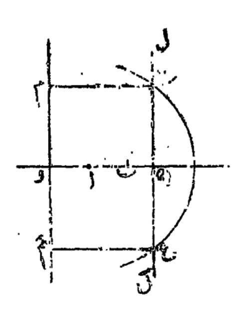
ثم نرسم ع م ، عَ مَ عمودين على الدليل

بحيث ان ع م ، ة و ، عَ مَ كلها عمودية على م و مَ وعلى ع ة عَ فيحدث

ع ب = و ة = م ع ، ب عَ = و ة = مَ عَ

وحينئذ تكون ع ، عَ نقطتين من نقط المنحنى

والشرط اللازم والكافى لتقاطع الدائرة التى مركزها ب ونصف قطرها و ه بالمستقيم ه ل هو أن يكون و ه أكبر من ب ه ويحصل هذا اذا أخذنا نقطة ه فى أى وضع فى الشكل على يمين ا وحينئذ أى مستقيم مواز لدليل القطع المكافئ وواقع فى الجهة التى بها البورة بالنسبة للدليل يقطع المنحنى فى نقطتين بشرط أن لا يكون بعد المستقيم عن الدليل أصغر من نصف بعد البورة عن الدليل .



وبناء عليه فالقطع المكافئ واقع كله فى الجهة التى بها البورة بالنسبة للدليل و يمتدّ الى بعد غير محدود .

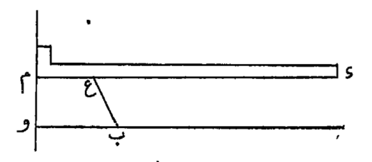
وحيث ان ب ع = ب عَ ، و ب ه عمود على ع عَ فلابد أن يكون ع ه مساويا للمستقيم ه عَ ويقال للمنحنى (متماثل) بالنسبة لمستقيم معلوم اذا كانت كل نقطة من نقط المنحنى تناظرها نقطة أخرى منه بحيث يكون الوتر الواصل بين النقطتين عمودا على المستقيم المفروض ومنصفا به . والمستقيم المفروض يسمى (محور) المنحنى .

والآن قد أثبتنا أن منحنى القطع المكافئ متماثل بالنسبة للعمود النازل من البورة على الدليل ولذا سمى هذا الخط (محور المنحنى)

ونقطة تقاطع المحور بالمنحنى تسمى (رأسا)

[فرأس القطع المكافئ فى الشكل المرسوم أعلاه هى نقطة ا]

٢٦ — قد بينا كيفية ايجاد عدّة نقط على المنحنى ويمكن رسم المنحنى بالاستمرار بالكيفية الآتية



توضع لذلك المسطرة م ء على الدليل بحيث يكون جانبها الطويل عمودا عليه والجانب الصغير منطبقا عليه كما فى الشكل ثم يؤخذ خيط طوله مساو لطول الضلع الطويل ويثبت طرفه فى نهاية المسطرة والطرف الآخر فى البورة وتزلق بعد ذلك المسطرة بطول الدليل ويحرك قلم الرصاص بجانب المسطرة بحيث يكون شادّا للخيط على الدوام فيرسم القلم قطعا مكافئا بورته البورة المعلومة ودليله الدليل المعلوم وذلك واضح حيث ان ب ع + ع ء = ء م فيكون ب ع = ع م

٢٧ — من الواضح أن ب ع أصغر من ع م لاى نقطة مثل ع داخل القطع المكافئ وأن ب ع أكبر من ع م لجميع النقط الخارجة

وذلك لأنه اذا فرضت ع داخل المنحنى ورسمنا ع م عمودا على الدليل

فانه يقطع المنحنى فى نقطة مثل ن بين ع ، م فيكون ب ن = ن م وحينئذ يكون ع م = ب ن + ن ع ويكون ب ن + ن ع أ كبر من ب ع

و بمثل هذا البرهان يمكن اثبات القضية لنقطة خارجة عن المنحنى

(مسألة ١) اذا كان البعد البورى لنقطة على منحنى قطع مكافئ مساويا للبعد البورى لنقطة أخرى عليه فالمطلوب البرهنة على أن الخط الواصل بين النقطتين مواز للدليل وأن البعدين البوريين لهما متساويا الميل على المحور

(مسألة ٢) اذا علم الدليل لقطع مكافئ وعلمت نقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن البورة واقعة على محيط دائرة ثابتة

(مسألة ٣) المطلوب ايجاد بورة قطع مكافئ اذا علم الدليل وعلمت نقطتان على المنحنى وكم قطعا مكافئا يمكن رسمها تفى بهذه الشروط

(مسألة ٤) اذا علمت بورة قطع مكافئ ونقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن الدليل مماس لدائرة ثابتة

(مسألة ٥) المطلوب ايجاد الدليل لقطع مكافئ اذا علمت البورة وعلمت نقطتان على المنحنى وكم حلا لهذه المسألة

(مسألة ٦) المطلوب ايجاد الدليل لقطع مكافئ اذا علمت البورة واتجاه المحور ونقطة على المنحنى

(مسألة ٧) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز الدائرة التى يمر محيطها بنقطة معلومة ويمس مستقيما معلوما هو منحنى قطع مكافئ

(مسألة ٨) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تمس مستقيما معلوما وتمس دائرة معلومة هو منحنى قطع مكافئ بورته مركز الدائرة المعلومة ودليله مواز للمستقيم المعلوم ويبعد عنه بمسافة تساوى نصف قطر الدائرة المعلومة

٢٨ — تعاريف — العمود النازل على المحور من أى نقطة من نقط القطع المكافئ يسمى (الاحداثى الرأسى) لهذه النقطة وطول المحور من رأس المنحنى الى نقطة تقاطعه بالاحداثى الرأسى يسمى (الاحداثى الأفقى) لها

ففى الشكل المرسوم فى بند ٢٥ ع ة هو الاحداثى الرأسى لنقطة ع ، ا ة هو الاحداثى الأفق لها ،

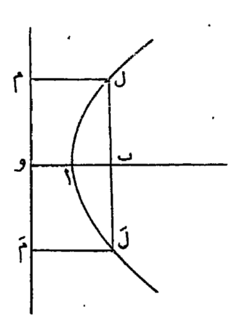
قد يسمى الوتر ع عَ العمودى على المحور ضعف الرأسى ويسمى كل وتر مار بالبورة وترا بوريا

فاذا كانت الزاوية بين الوتر البورى والمحور قائمة يسمى بالوتر البورى العمودى

٢٩ — النظرية الثانية — طول الوتر البورى العمودى للقطع المكافئ يساوى أربعة أمثال بعد البورة عن الرأس

[ل لَ = ٤ ا ب]

لنفرض ب بورة المنحنى ، م و مَ الدليل ، و ا ب المحور ، ل ب لَ الوتر البورى العمودى



ثم نرسم ل م ، لَ مَ عمودين على الدليل فبمقتضى التعريف يحدث

ب ل = ل م = ب و

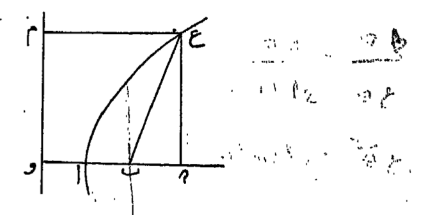
، ب لَ = لَ مَ = ب و

وحينئذ يكون ل لَ = ٢ ب و = ٤ ب ا

ويجب أن يلاحظ أن القطعين المكافئين اللذين وتراهما البوريان العموديان متساويان هما متساويان لأنه حيث ان الوترين البوريين العموديين متساويان يكون بعدا البورتين عن الدليلين المناظرين لهما متساويين ويمكن اذن تطبيق أحد المنحنيين على الآخر (كما جاء فى اقليدس) بحيث ينطبق الدليلان والبورتان وحينئذ ينطبق المنحنيان على بعضهما تمام الانطباق

٣٠ — النظرية الثالثة — الاحداثى الرأسى لنقطة من نقط القطع المكافئ وسط متناسب بين الاحداثى الأفقى والوتر البورى العمودى

[ع ح٢ = ٤ ا ب . ا ح]



للبرهنة على ذلك نصل ب ع ثم نرسم ع م عمودا على الدليل ، ع ح عمودا على المحور

فحيث ان $\overline{\text{ب ع}}^{٢} = \overline{\text{ع م}}^{٢} = \overline{\text{و ه}}^{٢}$

، $\overline{\text{ب ع}}^{٢} = \overline{\text{ع ه}}^{٢} + \overline{\text{ب ه}}^{٢}$

∴ $\overline{\text{ع ه}}^{٢} = \overline{\text{و ه}}^{٢} - \overline{\text{ب ه}}^{٢}$

$= (\text{و ه} - \text{ب ه})\,(\text{و ه} + \text{ب ه})$

$= \text{٤ ا ب . ا ه}$

لأن $\text{و ه} + \text{ب ه} = \text{٢ ا ه}$ ، $\text{و ه} - \text{ب ه} = \text{٢ ا ب}$

ويستنتج من الارتباط $\overline{\text{ع ه}}^{٢} = \text{٤ ا ب . ا ه}$ أن مربع العمود النازل على المحور من أى نقطة من نقط القطع المكافئ يتغير بتغير العمود النازل على الخط المار برأس المنحنى موازيا للدليل

(وبالعكس) اذا تحركت نقطة فى مستو بحيث ان مربع العمود النازل منها على أحد مستقيمين ثابتين ومتعامدين يتغير بتغير العمود النازل منها على المستقيم الآخر فان هذه النقطة ترسم منحنى قطع مكافئ

(مسألة) اذا فرض أن ع ه هو الاحداثى الرأسى لنقطة ع الواقعة على منحنى قطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمنتصف ع ه هو منحنى قطع مكافئ

لأنه اذا فرضت نقطة ں منتصف المستقيم ه ع يحدث

$\overline{\text{ه ں}}^{٢} = \tfrac{١}{٤}\,\overline{\text{ه ع}}^{٢} = \text{ا ب . ا ه}$ وحينئذ فالمحل الهندسى لنقطة ں هو منحنى قطع مكافئ رأسه نقطة ا ومحوره ا ب ه ووتره البورى العمودى مساو للمستقيم ا ب

(مسألة ١) اذا كان الاحداثى الرأسى والاحداثى الأفقى لنقطة على منحنى قطع مكافئ متساويين يكون كل منهما مساويا للوتر البورى العمودى

(مسألة ٢) المطلوب ايجاد الاحداثى الأفقى المناظر لضعف الرأسى الذى طوله ثلاثة أمثال الوتر البورى العمودى

(مسألة ٣) اذا فرض أن ع ى عَ ضعف رأسى لقطع مكافئ رأسه نقطة ا وفرض أن محيط الدائرة ا ع عَ يقطع المحور فى نقطة ن فالمطلوب البرهنة على أن ى ن يساوى الوتر البورى العمودى

(مسألة ٤) اذا فرض أن ع م عمود نازل على الدليل من نقطة على المنحنى مثل نقطة ع وأخذت نقطة ن على ع م بحيث يكون ع ن ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو منحنى قطع مكافئ مساو للمنحنى الأول .

(مسألة ٥) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة التى تقسم الاحداثى الرأسى لمنحنى قطع مكافئ بنسبة ثابتة هو منحنى قطع مكافئ آخر رأسه ومحوره رأس الأول ومحوره

(مسألة ٦) اذا فرضت ا رأس قطع مكافئ ، ع نقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنصفة للمستقيم ا ع هو منحنى قطع مكافئ آخر

(مسألة ٧) اذا فرض أن ب بورة قطع مكافئ ، ع نقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنصفة للمستقيم ب ع هو منحنى قطع مكافئ بورته نقطة ب ودليله فى منتصف المسافة بين ب ودليل القطع المكافئ المعلوم

(مسألة ٨) اذا فرض أن ب بورة قطع مكافئ ٬ ع نقطة على المنحنى ٬ ن نقطة على ب ع بحيث يكون ب ن : ب ع مساويا للنسبة معلومة فالمطلوب البرهنة على ان المحل الهندسى لنقطة ن هو منحنى قطع مكافئ.

(مسألة ٩) اذا فرضت ع نقطة ما على منحنى قطع مكافئ وانزل ع م عمودا على الدليل ثم مددنا م ع على استقامته الى نقطة ن بحيث يكون م ع = ع ن وفرض أن ه ٬ هَ موقعا الاحداثيين الرأسيين لنقطتى ع ٬ ن على التناظر فالمطلوب البرهنة على ان ب هَ = ٢ ا ه وان المحل الهندسى لنقطة ن هو منحنى قطع مكافئ رأسه نقطة ب

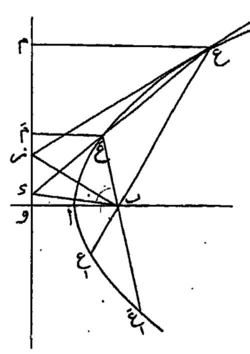
(مسألة ١٠) اذا فرضت ع نقطة على منحنى قطع مكافئ وأنزل ع م عمودا على الدليل فالمطلوب البرهنة على ان المحل الهندسى لنقطة ن المنصفة للستقيم م ع هو منحنى قطع مكافئ رأسه فى منتصفه المسافة بين و ٬ ا

٣١ — تعاريف — اذا فرض مستقيم يقطع منحنيا فى نقطتين مثل ع ٬ عَ وتحركت نقطة عَ على المنحنى فى جهة ع بحيث يكون المستقيم مارا بالنقطتين دائما فان الوضع النهائى للستقيم المذكور عند ما تصل عَ الى نقطة ع وتنطبق عليها يسمى مماسا للمنحنى فى نقطة ع والعمود المقام على المماس من نقطة التماس ع يسمى عمودى المنحنى فى نقطة ع المذكورة

٣٢ — النظرية الرابعة — (١) اذا رسم مستقيم يقطع الدليل لقطع مكافئ بورته ب فى نقطة ء ويقطع المنحنى فى نقطتى ع ٬ عَ يكون ء ب منصفا للزاوية الخارجة للزاوية الواقعة بين الضلعين ب ع ٬ ب عَ

(٢) جزء المماس المحدد بنقطة التماس والدليل يقابل زاوية قائمة رأسها بورة المنحنى

للبرهنة على ذلك نصل ب ع ، ب عَ ونمد كلا من عَ ب ، ع ب الى نقطتى ع١ ، ع١َ على التناظر ثم نرسم ع م ، عَ مَ عمودين على الدليل



فيحدث من تشابه المثلثين د ع م ، د عَ مَ

د ع : د عَ = ع م : عَ مَ

= ب ع : ب عَ (بمقتضى التعريف)

وبناء عليه يكون د ب منصفا للزاوية ع ب ع١َ أو الزاوية عَ ب ع١ ...(١)

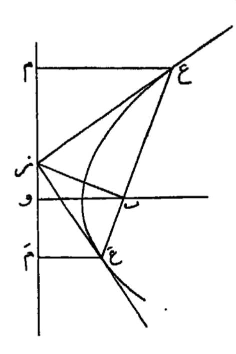
ولنفرض أن نقطة عَ تتحرك فى جهة ع حتى تنطبق عليها ونفرض أن ع ن هو الوضع النهائى للمستقيم ع عَ أى ان ع ن هو المماس فى نقطة ع فيكون ب د صانعا على الدوام زاويتين متساويتين مع كل من المستقيمين عَ ب ، ب ع١َ وبناء عليه فالمستقيم ن ب يصنع فى النهاية مع ع ب ، ب ع١ زاويتين متساويتين وحينئذ فكل من الزاويتين ن ب ع ، ن ب ع١ قائمة

واذًا ن ع يقابل زاوية قائمة رأسها نقطة ب ....(٢)

(و بالعكس) اذا رسمنا ب ن عمودا على ب ع ليقطع الدليل فى نقطة ن يكون ع ن مماسا فى نقطة ع

٣٣ ــ النظرية الخامسة ــ المماسان للقطع المكافئ فى نهايتى وتر بورى يتقابلان على الدليل و يكونان متعامدين

لنفــرض ع ب عَ وترا بوريا لقطع مكافئ ثم نرسم ب ن عمودا على ع ب عَ فيقطع الدليل فى نقطة ن



فحيث ان الزاويتين ن ب ع ، ن ب عَ قائمتان فيكون ن ع ، ن عَ مماسين للمنحنى

[بمقتضى عكس النظرية الرابعة]

وإذا فالمماسان فى نهايتى الوتر البورى يتقاطعان على الدليل

ثم نرسم ع م ، عَ مَ عمودين على الدليل

فحيث ان ن ب ع ، ن م ع قائمتان فتكون النقط ن ، ب ، ع ، م كلها واقعة على محيط دائرة وحيث ان ب ع ، ع م وتران متساويان فى هذه

الدائرة فالزاويتان المقابلتان لهما ب ن ع ، م ن ع متساويتان وحينئذ يكون ن ع منصفا للزاوية م ن ب

وكذلك يكون ن عَ منصفا للزاوية مَ ن ب

وحينئذ يكون الخطان ن ع ، ن عَ متعامدين

(مسألة ١) اذا رسم ع م عمودا على الدليل لقطع مكافئ بورته نقطة ب ورأسه نقطة ا فالمطلوب البرهنة على أن م ب منصف للزاوية ا ب ع

(مسألة ٢) اذا فرض أن ع ا يقطع الدليل فى نقطة ء فالمطلوب البرهنة على أن ء ب منصف للزاوية الخارجة ا ب ع

(مسألة ٣) اذا فرضت ع نقطة مّا على منحنى قطع مكافئ وفرضت ا رأس ذلك المنحنى ورسمنا ع م عمودا على الدليل و وصلنا ع ا فقطع الدليل فى نقطة ء فالمطلوب البرهنة على أن م ء يقابل زاوية قائمة رأسها بورة القطع المكافئ

(مسألة ٤) ع ب عَ وتر بورى لقطع مكافئ ، ں نقطة على المنحنى وفرض أن ع ں ، عَ ں يقطعان الدليل فى نقطتى ء ، ءَ على التناظر والمطلوب البرهنة على أن ء ءَ يقابل زاوية قائمة رأسها البورة

(مسألة ٥) اذا فرض أن ع ب عَ وتر بورى لقطع مكافئ وان ا رأسه وفرض أن ع ا يقطع الدليل فى نقطة م فالمطلوب البرهنة على أن عَ م مواز للمحور

(مسألة ٦) اذا كان لقطعين مكافئين دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين النقط المشتركة بينهما منصف للمستقيم الواصل بين البورتين وعمود عليه

(مسألة ٧) اذا فرض أن ثلاثة قطاعات مكافئة لها دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن الثلاثة الأوتار المشتركة بينها مأخوذة مثنى مثنى تتقاطع فى مركز الدائرة المرسومة حول مثلث رؤوسه البور الثلاثة .

(مسألة ٨) المطلوب البرهنة على أن المماسين للقطع المكافئ فى نهايتى الوتر البورى العمودى يمران بموقع الدليل .

(مسألة ٩) اذا فرض أن جملة قطاعات مكافئة لها دليل مشترك ومحور مشترك فالمطلوب اثبات أن كل هذه القطاعات تمس مستقيمين ثابتين متعامدين

(مسألة ١٠) اذا فرض أن جملة قطاعات مكافئة لها دليل واحد وتمس مستقيما معلوما فالمطلوب البرهنة على أن جميع هذه المنحنيات تمس مستقيما آخر عمودا على الأول وان بورها واقعة على مستقيم ثابت

(مسألة ١١) اذا فرض أن م ء مَ هو الدليل لقطع مكافئ بورته ب فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين للزاويتين م ء ب ، مَ ء ب مماسان للقطع المكافئ مع فرض أن ء نقطة مّا على الدليل .

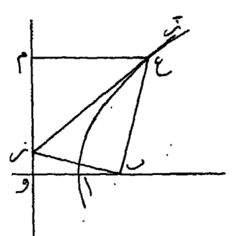
(مسألة ١٢) مفروض قطعان مكافئان بورتاهما ب ، بَ ولهما دليل مشترك والمطلوب البرهنة على أن المماسين المشتركين بينهما يتقابلان فى نقطة تقاطع ب بَ بالدليل المشترك ويكونان متعامدين

(مسألة ١٣) المطلوب البرهنة على أن الدائرة التى قطرها أى وتر بورى فى قطع مكافئ يمسها الدليل

(مسألة ١٤) المطلوب ايجاد بورة القطع المكافئ اذا علم الدليل والمماس فى نقطة معلومة

(مسألة ١٥) المطلوب ايجاد بورة القطع المكافئ اذا علم الدليل ومماسان ومتى تكون هذه الشروط غير كافية .

٣٤ — النظرية السادسة — المماس للقطع المكافئ فى نقطة منه مثل نقطة ع منصف للزاوية الواقعة بين ب ع والمستقيم ع م العمود على الدليل



للبرهنة على ذلك نمد المماس ليقطع الدليل فى نقطة ن ثم نصل ب ن ونرسم ع م عمودا على الدليل

فحيث ان الزاويتين ن ب ع ، ن م ع قائمتان فتكون الأربع النقط ن ، ب ، ع ، م واقعة على محيط دائرة . وحيث ان ب ع ، ع م وتران متساويان فى هذه الدائرة فتكون

$$\angle \text{ب ن ع} = \angle \text{م ن ع}$$

وبناء عليه تكون الزاويتان المتممتان لهما متساويتين أيضا أى ان

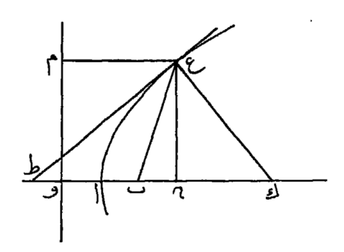
$$\angle \text{ب ع ن} = \angle \text{م ع ن}$$

فحينئذ يكون المستقيم ع ن منصفا للزاوية ب ع م

نتيجة ١ — المماس فى نقطة ا منصف للزاوية الواقعة بين ب ا ، ا و وبناء عليه فالمماس فى نقطة الرأس عمود على المحور

نتيجة ٢ — اذا مد ن ع على استقامته الى نقطة نَ فالزاويتان ب ع نَ ، م ع نَ متساويتان

٣٥ — النظرية السابعـــة — اذا فرض أن المماس لقطع مكافئ في نقطة ع يقطع المحور في نقطة ط وفرض أن ع ى هو الاحداثي الرأسي لنقطة ع فيكون ب ع = ب ط ويكون ط ا = ا ى



للبرهنة على ذلك نصل ب ع ونرسم ع م عمودا على الدليل

فتكون ∠ ب ع ط = ∠ م ع ط

[بمقتضى النظرية السادسة]

∴ ∠ ب ع ط = ∠ ع ط ب

[لأن ع م ، ى ط متوازيان]

∴ ط ب = ب ع

وحيث ان ط ب = ب ع = ع م = و ى

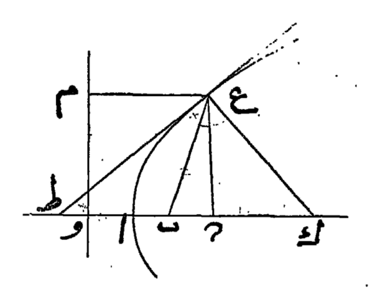
∴ ط ا + ا ب = و ا + ا ى

∴ ط ا = ا ى

تعريف — (تحت المماس) هو الجزء من المحور المحدود بين الاحداثي الرأسي لأى نقطة والمماس المناظر

وبناء عليه يكون تحت المماس دائما مساويا لضعف الاحداثي الافقي

٣٦ — النظرية الثامنة — اذا كان عمودى المنحنى فى نقطة ع يقابل المحور فى نقطة ك وفرض أن ع ه هو الاحداثى الرأسى لنقطة ع يكون ب ك = ب ع ويكون ه ك = ٢ ا ب



للبرهنة على ذلك نصل ب ع ونرسم ع م عمودا على الدليل

فتكون ∠ ب ع ط = ∠ م ع ط [بمقتضى النظرية السادسة]

= الزاوية ع ط ب

وحيث ان الزاوية ط ع ك قائمة ، ∠ ب ط ع = ∠ ب ع ط

فتكون الزاويتان المتممتان لهما متساويتين أى تكون

∠ ب ك ع = ∠ ب ع ك

∴ ب ع = ب ك

وحيث ان ب ك = ب ع = و ه

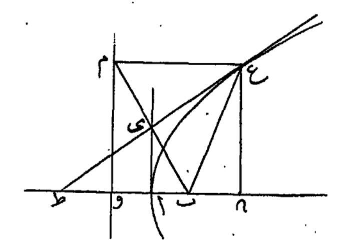
فيحدث ب ه + ه ك = و ب + ب ه

∴ ه ك = و ب = ٢ ا ب

تعريف — (تحت العمود) هو الجزء من المحور المحصور بين الاحداثى الرأسى لأى نقطة وعمودى المنحنى فى هذه النقطة .

وبناء عليه فتحت العمود فى أى نقطة من نقط القطع المكافئ مساو لنصف الوتر البورى العمودى

٣٧ — النظرية التاسعة — المحل الهندسى لموقع العمود النازل من بورة قطع مكافئ على المماس هو المماس للمنحنى فى نقطة الرأس وطول العمود وسط متناسب بين البعدين البوريين لكل من نقطة التماس والرأس



للبرهنة على ذلك نصل ب ع ونرسم ع م عمودا على الدليل ثم نصل ب م فالخط المماس فى نقط ع يقطعه فى نقطة ى

فحيث ان ب ع = ع م والمماس فى نقطة ع منصف للزاوية ب ع م فلا بد أن يكون المماس عمودا على ب م ومنصفا للستقيم ب م فى نقطة ى

وحيث ان ب ى = ى م ، ب ا = ا و فلا بد أن يكون ا ى موازيا للمستقيم و م

فيتضح اذا أن النقطة ى واقعة على المماس فى نقطة الرأس

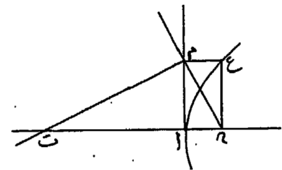
وحيث ان الزاويتين ب ى ط ، ى ا ب قائمتان فيكون المثلثان ا ب ى ، ى ب ط متشابهين

∴ ا ب : ب ى = ب ى : ب ط = ب ى : ب ع

وبناء عليه يكون $\overline{\text{ب ى}}^{٢}$ = ا ب . ب ع

عكس هذه النظرية له أهمية عظمى وهو

اذا تحرك مستقيم بحيث أن موقع العمودى عليه من نقطة ثابتة يكون دائما على مستقيم ثابت فالمستقيم المتحرك يكون دائما مماسا للقطع المكافئ الذى بورته النقطة الثابتة والمماس له فى نقطة الرأس هو ذلك المستقيم الثابت



(مسألة) اذا رسمنا من نقطة ما على منحنى قطع مكافئ كنقطة ع المستقيمين ع ن ، ع م عمودين على المحور وعلى المماس للمنحنى فى نقطة الرأس فالمطلوب البرهنة على أن ن م مماس لقطع مكافئ ثابت

للبرهنة على ذلك نرسم م بَ عمودا على ن م فيقطع المحور فى نقطة بَ فحيث ان الزاويتين ن م بَ ، م ا ن قائمتان فيحدث

$\overline{\text{م ا}}^{٢}$ = بَ ا × ا ن

ولكن $\overline{\text{م ا}}^{٢}$ = $\overline{\text{ع ن}}^{٢}$ = ٤ ا ب × ا ن

وبناء عليه يكون بَ ا = ٤ ا ب وحينئذ تكون بَ نقطة ثابتة

ومن ذلك يتضح أن م ن مماس لقطع مكافئ بورته بَ والمماس له فى الرأس هو الخط ا م

مسائل على النظريتين السابعة والثامنة

(١) المطلوب البرهنة على أن ط ب ع م معين

(٢) المطلوب البرهنة على أن ط ع ، ب م منصفان لبعضهما ومتعامدان

(٣) المطلوب البرهنة على أن م ع ك ب متوازى أضلاع

(٤) اذا فرض أن ب ع ك مثلث متساوى الاضلاع فالمطلوب البرهنة على أن كل ضلع من أضلاعه مساويا للوتر البورى العمودى

(٥) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ط م ب ، ب ع ك متساويان

(٦) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ط و م ، ب ن ع متساويان

(٧) المطلوب البرهنة على أن المثلثين م و ب ، ع ن ك متساويان

(٨) اذا فرض أن ك ل عمود على ب ع فالمطلوب البرهنة على أن ع ل = ن ك = ٢ ا ب

(٩) المطلوب البرهنة على أن المماسين والعمودين فى نهايتى الوتر البورى العمودى تكون مربعا

(١٠) اذا فرض أن و هـ مواز للمستقيم ب ع ويقطع ع م فى نقطة هـ فالمطلوب البرهنة على أن ن هـ مواز للمستقيم ع ك

(١١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنصفة للمستقيم ع ك هو منحنى قطع مكافئ رأسه نقطة ب

(١٢) اذا فرض أن عدة قطاعات مكافئة لها بورة مشتركة ومحور مشترك ثم رسمنا مماسات لها من نقطة واحدة على المحور المشترك فالمطلوب البرهنة على أن نقط التماس واقعة على محيط دائرة

(١٣) اذا فرض أن المستقيم الواصل بين نقطة على منحنى قطع مكافئ مثل نقطة ع ونقطة الرأس يقطع الدليل فى نقطة ى فالمطلوب البرهنة على أن ى ب مواز للماس فى نقطة ع

مسائل على النظرية التاسعة

(١) المطلوب البرهنة على أن أى مماس للقطع المكافئ يقطع الدليل وامتداد الوتر البورى العمودى فى نقطتين متساويتى البعد من البورة

(٢) اذا وصلنا البورة ب لقطع مكافئ بنقطة على الدليل مثل نقطة م فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المنصف للمستقيم ب م عمودا عليه مماس للمنحنى

(٣) اذا رسمنا مماسات لجملة دوائر متحدة المركز فى نقط تقاطع هذه الدوائر بمستقيم ثابت فالمطلوب البرهنة على أن كل هذه المماسات تمس قطعا مكافئا

(٤) المطلوب ايجاد الدليل لقطع مكافئ اذا علم مماسان له وعلمت البورة

(٥) اذا علمت بورة قطع مكافئ وعلم مماسان له فالمطلوب ايجاد نقطتى التماس

(٦) المطلوب ايجاد الدليل لقطع مكافئ معلوم بورته والمماس فى نقطة معلومة

(٧) اذا كان قطعان مكافئان لهما بورة مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن الوتر المشترك منصف الزاوية الواقعة بين الدليلين

(٨) اذا كان قطعان مكافئان لهما بورة مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بينها وبين نقطة تقاطع الدليلين عمود على المماس المشترك

(٩) اذا فرض أن قطعين مكافئين متساويين لهما بورة مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن وترهما المشترك يمر بالبورة وعمود على المماس المشترك .

(١٠) اذا فرض أن ك نقطة ثابتة ، ع نقطة على مستقيم ثابت ثم أخذنا نقطة ں على المستقيم بحيث يكون ع ں = ك ع فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين نقطة ع والنقطة المنصفة للمستقيم ك ں هو مماس لقطع مكافئ بورته نقطة ك

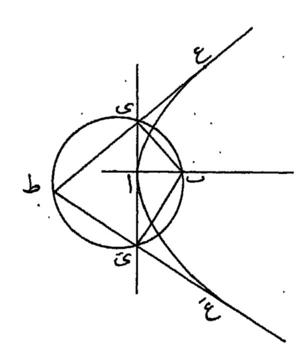
(١١) اذا فرض أن ع ﮣ هو الاحداثى الرأسى لأى نقطة على منحنى قطع مكافئ مثل نقطة ع وأخذت نقطة م على المحور بحيث يكون ا ﮣ = ﮣ م فالمطلوب البرهنة على أن م ع مماس لقطع مكافئ ثابت

(١٢) اذا رسمنا مستقيما من بورة قطع مكافئ ليقطع المماس فى نقطة ع ويكون معه زاوية معلومة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للأوضاع المختلفة لنقطة التقاطع ع هو خط مستقيم

[ويكون التقاطع على المماس الذى يكون مع المحور الزاوية المعلومة]

٣٨ — النظرية العاشرة — كيفية رسم مماسات لمنحنى قطع مكافئ من نقطة خارجة عنه نفرض ط النقطة الخارجة ثم نصل ط ب ونرسم دائرة قطرها ط ب فتقطع فى نقطتى ى ، ى َ مماس المنحنى فى نقطة الرأس ثم نقول ان الزاويتين ط ىَ ب ، ط ى ب قائمتان فحينئذ لو مددنا ط ى ، ط ىَ على استقامتهما فانهما يكونان مماسين للقطع المكافئ لأن موقعى العمودين النازلين عليهما من البورة واقعان على المماس فى نقطة الرأس

وقد تقدم بيان كيفية رسم مماسات لجميع القطاعات المخروطية فى بند ١٦



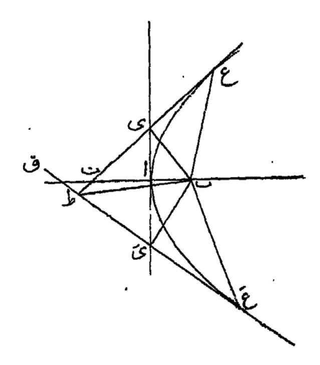
(مسألة ١) اذا فرضت ع نقطة على منحنى قطع مكافئ بورته نقطة ب فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة المرسومة على ب ع باعتباره قطرا لها تمس المستقيم المماس للمنحنى فى نقطة الرأس

(مسألة ٢) اذا فرضت ط نقطة خارجة عن منحنى قطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة المرسومة على ب ط باعتباره قطرا لها تقطع المستقيم المماس للمنحنى فى نقطة الرأس فى نقطتين حقيقيتين

(مسألة ٣) المطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم مماسين حقيقيين للقطع المكافئ من أى نقطة خارجة عنه

٣٩ ــ النظرية الحادية عشرة ــ لو فرضنا ط ع ، ط ع َ أى المماسين لقطع مكافئ بورته ب يكون المثلثان ط ع ب ، ط ب ع َ متشابهين

ويكون ب ع . ب عَ = ب ط٢ وكذلك يكون المماسان مقابلين لزاويتين متساويتين رأسهما البورة



للبرهنة على ذلك نرسم مماسا للمنحنى فى نقطة الرأس فيقطع المماسين الآخرين فى نقطتى ى ، ىَ ثم نقول ان ب ى ، ب ىَ عمودين على ط ع ، ط عَ على التناظر فحينئذ تكون النقط ب ، ى ، ط ، ىَ كلها واقعة على محيط دائرة فحينئذ تكون ∠ ب ط ىَ = ∠ ب ى ىَ

ولكن اذا كان ع ط يقطع المحور فى نقطة ط١ يحدث

∠ ب ى ا = ∠ ب ت ى = ∠ ب ع ط

وحينئذ تكون ∠ ب ط عَ = ∠ ب ع ط

وكذلك تكون ∠ ب ط ع = ∠ ب عَ ط

وحينئذ تكون الزاويتان الباقيتان من زوايا المثلثين ط ع ب ، ط ب عَ متساويتين أيضا وهما

∠ ع ب ط = ∠ ط ب عَ

أى أن ط ع ، ط عَ يقابلان زاويتين متساويتين رأسهما البورة

ثم نقول حيث ان المثلثين ط ع ب ، ط ب عَ متساويا الزوايا فهما متشابهان

ويكون ب ع : ب ط = ب ط : ب عَ

∴ ب ع × ب عَ = $\overline{\text{ب ط}}^{2}$

نتيجة ١ — الزاوية ط١ ط ن مكملة لمجموع الزاويتين ب ط عَ ، ب ط ع أى مكملة لمجموع الزاويتين ب ع ط ، ب ط ع

فحينئذ تكون ∠ ط١ ط ن = ∠ ط ب ع = ∠ ط ب عَ

واذن فالزاوية الخارجة المكوّنة من تلاقى مماسين لقطع مكافئ مساوية للزاوية التى تقابل أىّ المماسين ورأسها بورة المنحنى

نتيجة ٢ — حيث ان المثلثين ع ب ط ، ط ب عَ متشابهان فينتج من تشابههما أن $\overline{\text{ط ع}}^{2}$: $\overline{\text{ط عَ}}^{2}$ = $\overline{\text{ع ب}}^{2}$: $\overline{\text{ب ط}}^{2}$.

وكذلك يكون ع ب : ب ط = ب ط : ب عَ

∴ $\overline{\text{ع ب}}^{2}$: $\overline{\text{ب ط}}^{2}$ = ع ب : ب عَ

فحينئذ يكون $\overline{\text{ط ع}}^{2}$: $\overline{\text{ط عَ}}^{2}$ = ع ب : ب عَ

واذا فالنسبة بين مربعى أى مماسين لقطع مكافئ تساوى النسبة لبعدى نقطتى التماس عن البورة

مسائل

(١) اذا كان ط ع ، ط عَ مماسين لقطع مكافئ ووصلنا ع عَ ليقطع الدليل فى نقطة ن فالمطلوب البرهنة على أن ب ن عمود على ب ط

[لأن ب ن منصف للزاوية الخارجة ع ب عَ وكذلك ب ط منصف للزاوية ع ب عَ]

(٢) اذا كان ط ع ، ط عَ مماسين لقطع مكافئ بورته ب فالمطلوب البرهنة على أن الدائرتين ط ع ب ، ط عَ ب يمسان ط عَ ، ط ع على التناظر

(٣) اذا علم مماسان لقطع مكافئ وعلمت نقطة التماس لأحدهما فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للبورة هو محيط دائرة

(٤) المطلوب رسم منحنى قطع مكافئ (أى ايجاد البورة والدليل) اذا علمت نقطتان واقعتان عليه والمماسان له فيها

(٥) اذا رسم مماسان لقطع مكافئ فى نقطة واقعة على المحور فالمطلوب البرهنة على أن هذين المماسين يقطعان أى مماس آخر فى نقطتين متساويتى البعد عن البورة

(٦) لو فرضنا أن مماسا متحركا لقطع مكافئ يقطع مماسين ثابتين له فى نقطتى ط ، طَ فالمطلوب البرهنة على أن ب ط : ب طَ ثابت مع فرض ب بورة المنحنى

(٧) المطلوب رسم منحنى قطع مكافئ اذا علمت ثلاثة مماسات له ونقطة التماس لأحدها

(٨) المطلوب رسم منحنى قطع مكافئ اذا علمت ثلاثة مماسات له وعلم اتجاه المحور

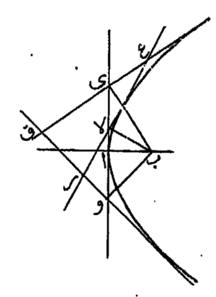
٤٠ ــ النظرية الثانية عشرة ــ اذا كانت اضلاع مثلث مماسة لقطع مكافئ تكون الدائرة المرسومة على المثلث مارة بالبورة

للبرهنة على ذلك نقول انه معلوم أن مواقع الأعمدة النازلة من البورة على المماسات واقعة على خط مستقيم وهو المماس للمنحنى فى نقطة الرأس

ولكنه ثابت بناء على نظرية هندسية مشهورة انه اذا كانت مواقع الاعمدة النازلة من نقطة على أضلاع المثلث الثلاثة واقعة على خط مستقيم فان هذه النقطة يلزم أن تكون واقعة على الدائرة المرسومة حول المثلث *

ويمكن اثبات هذه النظرية بطريقة ثانية فنقول

لنفرض ع ق ر المثلث المكون من المماسات الثلاثة ثم نرسم مماسا للمنحنى فى نقطة الرأس فيقطع المستقيمات الثلاثة ق ر ، ر ع ، ع ق فى و ، لا ، ى على التناظر



وحيث ان الزاويتين ب و ق ، ب ى ق قائمتان فاذا تكون النقط ب ، و ، ى ، ق واقعة على محيط دائرة

وحينئذ تكون ∠ ب ق ى = ∠ ب و لا .

وحيث ان الزاويتين ب و ر ، ب لا ر قائمتان فتكون النقط ب ، و ، لا ، ر واقعة على محيط دائرة أيضا وحينئذ تكون

∠ ب و لا = ∠ ب ر لا

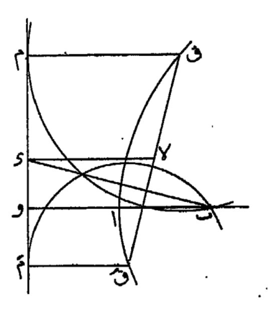
* أنظر هندسة اقليدس عمل سميث و بريانت صحيفة ٢٢٩

وبناء عليه تكون ‍ ـد ب ق ى = ـد ب ر و أى أن ـد ب ق ع = ـد ب ر ع ومنه ينتج أن النقط ب ، ق ، ع ، ر واقعة على محيط دائرة

٤١ — النظرية الثالثة عشرة — النقط المنصفة لجملة أوتار متوازية فى قطع مكافئ هى واقعة على خط مستقيم مواز للمحور

لنفرض ق قَ أحد الأوتار المتوازية ثم نرسم ق م ، قَ مَ عمودين على الدليل

ثم اذا رسمنا دائرتين مركزهما ق ، قَ ونصفا قطريهما ق م ، قَ مَ على التناظر فانهما يمسان الدليل فى نقطتى م ، مَ على التناظر ويمران بالبورة



ولكن من الواضح أن الوتر المشترك فى اى دائرتين عمود على الخط الواصل بين مركزيهما ومنصف لأى مماس مشترك

وحينئذ يكون العمود النازل من نقطة ب على ق قَ منصفا للمستقيم م مَ فى نقطة مثل نقطة ى

وحيث ان ى هى النقطة المنصفة للمستقيم م مَ فيكون المستقيم المرسوم من نقطة ى موازيا لمحور المنحنى أى موازيا للخط م ق ، مَ قَ منصفا للخط ق قَ فى نقطة مثل نقطة لا

ونقطة ى واحدة لجميع الأوتار الموازية للمستقيم ق قَ وينتج من ذلك أن النقط المنصفة لجملة أوتار متوازية فى قطع مكافئ واقعة على مستقيم مواز للمحور

نتيجة — اذا رسمنا من نقطة لا خطا موازيا للمحور ليقطع المنحنى فى نقطة ع يكون المماس فى نقطة ع موازيا للأوتار

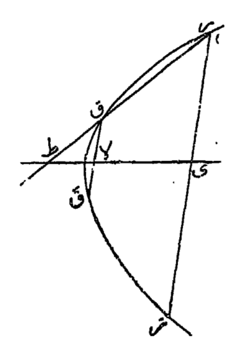
لأنه اذا كان المستقيم المرسوم من نقطة ع موازيا للاوتار التى منتصفاتها على المستقيم ع لا يقطع المنحنى فى نقطة أخرى كنقطة ر فحينئذ تكون النقطة المنصفة للمستقيم ع ر واقعة على المستقيم ع لا واذا تكون واقعة على نقطة ع وذلك لايتأتى الا اذا انطبقت النقطتان ع ، ر

تعريف — (قطر) القطع المكافئ هو المحل الهندسى للنقط المنصفة لجملة أوتار متوازية

وواضح من هذا التعريف أن جميع أقطار القطع المكافئ هى مستقيمات موازية للمحور وواضح أيضا أن المماس لمنحنى القطع المكافئ فى نقطة تقاطع القطر بالمنحنى مواز للأوتار التى ينصفها هذا القطر

٤٢ — النظرية الرابعة عشرة — المماسان لقطع مكافئ فى نهايتى أى وتر يتقابلان على القطر الوتر المنصف لهذا

نفرض ق قَ ، ر رَ أى وترين متوازيين لقطع مكافئ ونفرض أن لا ، ى نقطتان منصفتان لهما فيكون لا ى قطرا للنحنى



ثم نرسم ق ر فيقطع لا ى فى نقطة ط

فيكون ى ط : لا ط = ر ى : ق لا

∴ ى ط : لا ط = ى رَ : لا قَ

وحينئذ يكون ط قَ رَ خطا مستقيما

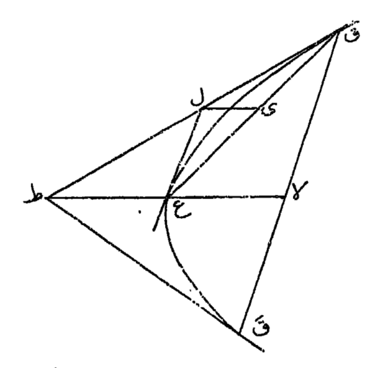
واذا فالوتران ق ر ، قَ رَ يتقابلان على القطر المـار بنقطة لا وذلك صحيح لجميع أوضاع الوتر الموازى وهو ر رَ

ثم نفرض أن ر رَ يتحرك فى جهـة ق قَ حتى ينطبق عليـه فيتحرك تبعا له المستقيمان ق ر ، قَ رَ حتى يصيرا أخيرا مماسين للمنحنى فى نقطتى ق ، قَ على التناظر

وبناء عليه فالماسان للمنحنى فى نقطتى ق ، قَ يتقابلان على القطر المار بنقطة لا

تعريف — المستقيم ق لا الموازى لماس المنحنى فى نهاية أى قطر مثل ع لا يسمى (احداثيا رأسيا) لهذا القطر وجزء القطر المحصور بين النهاية ونقطة تقابله بالاحداثى الرأسى المذكور يسمى (الاحداثى الأفقى) له

٤٣ — النظرية الخامسة عشرة — اذا فرض أن مماسين من نهايتى وترقطع مكافئ مثل الوتر ق قَ يتقابلان فى نقطة ط وفرض أن القطر المار بنقطة ط يقطع المنحنى فى نقطة ع ويقطع الوتر ق قَ فى نقطة لا يكون ط ع = ع لا



لأنه واضح أن القطر المار بنقطة ط منصف للوتر ق قَ وواضح ايضا ان المماس فى نقطة ع مواز للوتر ق قَ

ثم نفرض ان المماس فى نقطة ع يقطع ط ق فى نقطة ل ونفرض ان القطر المار بنقطة ل يقطع المستقيم ع ق فى نقطة ى فيكون ل ى منصفا للمستقيم ع ق وموازيا للمستقيم ط ع لا

وحينئذ يكون ط ل : ل ق = ع ى : ى ق

∴ ط ل = ل ق

ولكن ع ل مواز للمستقيم ى لا

∴ ط ع : ع لا = ط ل : ل ق

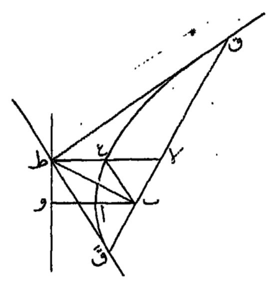
∴ ط ع = ع لا

نتيجة — حيث ان ط ل = ل ق فينتج أن

ل ق : ل ع = ل ط : ل ع

وحينئذ فالنسبة بين طولى المماسين لقطع مكافئ تساوى النسبة بين ضلعى أى مثلث ضلعاه موازيان لمماسى القطع المكافئ وقاعدته موازية لمحوره

٤٤ — النظرية السادسة عشرة — فى القطع المكافئ طول الوتر البورى الموازى لمماس القطع المكافئ فى نقطة ع يساوى ٤ ب ع



للبرهنة على ذلك نقول نفرض ق ب قَ الوتر البورى الموازى للمماس فى نقطة ع فواضح أن المماسين فى نقطى ق ، قَ متعامدان ويتقاطعان فى نقطة واقعة على الدليل وواقعة أيضا على القطر المار بنقطة ع

وحينئذ تكون نقطة لا هي النقطة المنصفة لوتر المثلث القائم الزاوية ق ط قَ

∴ ق قَ = ٢ ق لا = ٢ لا ط

وكذلك يكون ب ط عمودا على ق قَ وتكون نقطة ع هي النقطة المنصفة للمستقيم ط لا وحينئذ تكون نقطة ع هي النقطة المنصفة لوتر المثلث القائم الزاوية ط ب لا

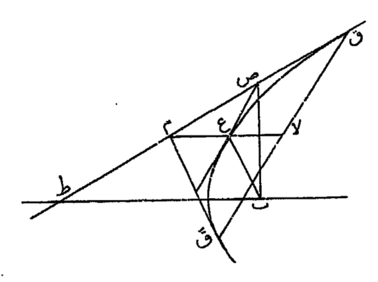
∴ ط لا = ٢ ط ع = ٢ ع ب

∴ ق قَ = ٢ لا ط = ٤ ع ب

تعريف — الوتر البورى الموازى للماس فى نقطة كنقطة ع لمنحنى قطع مكافئ يسمى (الوتر البورى القاسم) للقطر المار بنقطة ع

٥٤ — النظرية السابعة عشرة — الاحداثى الرأسى لأى قطر هو وسط متناسب بين الاحداثى الأفقى والوتر البورى القاسم لهذا القطر

[ق لا^2 = ٤ ب ع × ع لا]



نفرض ان المماس فى نقطة ن يقطع القطر المار بنقطة ع فى م ويقطع المحور فى نقطة ط

ثم نفرض أن المماسين فى نقطتى ع ، ن يتقابلان فى نقطة ص ثم نصل ب ع ، ب ص ، ب ق

فيكون ع ص منصفا للزاوية م ع ب [بمقتضى النظرية السادسة]

∴ الزاوية ب ع ص = الزاوية ص ع م

وحيث ان ص ع ، ص ن مماسان

فتكون الزاوية ب ص ع = الزاوية ب ق ص [بمقتضى النظرية الحادية عشرة]

= الزاوية ب ط ن [بمقتضى النظرية السابعة]

= الزاوية ع م ص

وحينئذ تكون المثلثان ب ع ص ، ص ع م متشابهين

∴ ب ع : ع ص = ع ص : م ع

∴ $\overline{ع ص}^{٢}$ = ب ع × م ع = ب ع × ع لا

ولكن حيث ان م لا = ٢ م ع فيكون ق لا = ٢ ع ص

وحينئذ يكون ق لا^{٢} = ٤ ع ص^{٢} = ٤ ب ع × ع لا

نتيجة — اذا رسمنا ق ى عمودا على القطر ع لا فى قطع مكافئ وفرضنا ق لا الاحداثى الرأسى لهذا القطر يكون $\overline{ق ى}^{٢}$ = ٤ ا ب × ع لا

لانه ينتج من تشابه المثلثات أن

$\overline{ق ى}^{٢}$: $\overline{ق لا}^{٢}$ = $\overline{ع ه}^{٢}$: $\overline{ع ط}^{٢}$ [أنظر شكل النظرية التاسعة]

= $\overline{ب ى}^{٢}$: $\overline{ب ع}^{٢}$

= ب ا : ب ع

وواضح من الارتباط ق لا^{٢} = ٤ ب ع × ع لا أننا اذا فرضنا مستقيمين ثابتين كالمستقيمين م ا ، م ع ثم رسمنا من نقطة ق المستقيم ق لا موازيا للمستقيم م ع ومددناه ليقطع م ا فى نقطة لا فان النقطة ق بتحركها بكيفية

تجعـل م لا يتغير بتغير $\overline{\text{ق لا}}^{2}$ ترسم قطعا مكافئا يكون م ا قطرا له ، م ع مماسا له فى طرف هذا القطر

فلوكان $\overline{\text{ق لا}}^{2}$ يتغير بتغير م لا ينتج من ذلك مباشرة أن العمود المرسوم على م ع من نقطة ق يتغير كتغير مربع العمود المرسوم على م ا

وبناء عليه فان النقطة ترسم قطعا منحنيا اذا تحركت بكيفية مخصوصة بحيث يكون بعدها العمودى عن أحد مستقيمين معلومين (مكونين لأى زاوية) يتغير كتغير بعدها العمودى عن المستقيم الثانى

ومن المهم أيضا أن نلاحظ أنه اذا رسم مستقيم ليقطع مستقيمين ثابتين بحيث ان الجزء من أحد المستقيمين الذى يحدده القاطع من نقطة التقاطع يتغير كتغير مربع الجزء من المستقيم الآخر فان هذا المستقيم القاطع يمس دائما قطعا مكافئا ثابتا يكون أحد المستقيمين الثابتين قطرا له والآخر مماسا له من طرف هذا القطر

لاننا لو فرضنا م ع ، ع ص هما المستقيمان الثابتان ثم رسمنا المستقيم ع ص قاطعا لهما بحيث يكون ع ص^{2} = م ع × ع ل مع فرض ع ل بُعدا ثابتا . ثم رسمنا من نقطة ع خطا يكون مع المستقيم ص ع زاوية مساوية للزاوية ص ع م وفرضنا نقطة ب على هذا الخط بحيث يكون ع ب = ع ل فاننا نرى أن م ص دائما مماس لقطع مكافئ بورته نقطة ب ويمر منحنيه فى نقطة ع ويكون ع م قطرا له

(مسألة ١) اذا كان ق لا أى احداثى رأسى للقطر المرسوم من نقطة ثابتة كنقطة ع على منحنى قطع مكافئ ورسم متوازى الاضلاع ع لا ق ر فالمطلوب اثبات أن المستقيم لا ر مماس لقطع مكافئ ثابت وذلك لان

$\overline{\text{ع ر}}^{2}$ = $\overline{\text{ق لا}}^{2}$ = ٤ ب ع . ع لا فحينئذ يكون ع ر^{2} ∞ ع لا

وبناء عليه يكون ر لا مماسا لقطع مكافئ ثابت أحد اقطاره المستقيم لا ع والمماس له من طرف هذا القطر هو المستقيم ع ر

(مسألة ٢) م ا ، م ح مستقيمان ثابتان ورسمنا دائرة تمر بالنقطة الثابتة ح وتمس المستقيم م ا والمطلوب البرهنة على أنه اذا كانت الدائرة تمس م ا فى نقطة ع وتقطع م ح فى نقطة ثانية كنقطة ى فان المستقيم ع ى يمس على الدوام قطعا مكافئا ثابتا

(مسألة ٣) المطلوب اثبات أنه اذا أخذت جملة اوتار متوازية فان المجموع الجبرى للعمودين النازلين من نهايتى أى وتر منها على محور المنحنى يكون ثابتا

(مسألة ٤) اذا كان وتران من قطع مكافئ يكونان مع المحور زاويتين متساويتين وبشرط أن لايكونا متوازيين فان المجموع الجبرى للاحداثيات الرأسية لأطرافها الأربعة يساوى صفرا

(مسألة ٥) المطلوب رسم وتر بورى ذى طول معلوم فى قطع مكافئ

(مسألة ٦) اذا كان وتران بوريان فى قطع مكافئ متساويين فانهما يكونان مع المحور زاويتين متساويتين

(مسألة ٧) المطلوب البرهنة على أن الوتر البورى العمودى فى قطع مكافىء هو أقصر الأوتار البورية فى القطع المكافئ

(مسألة ٨) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين نقطة تقاطع مماسين لقطع مكافئ فى طرفى أى وتر بورى وبين نقطة تقاطع العمودين على المنحنى فى هذين الطرفين مواز للمحور

(مسألة ٩) اذا فرضنا أن ى لا هو الاحداثى الرأسى للقطر المار بنقطة ع وفرضنا ع ے الاحداثى الرأسى للقطر المار بنقطة ى فالمطلوب البرهنة على أن لا ے مواز للمستقيم ع ى

(مسألة ١٠) اذا فرض أن ط ن ، ط نَ مماسان لقطع مكافئ بورته ب وفرض ان القطر المار بنقطة ط يقطع الدليل فى نقطة ص وأن المستقيم ن نَ يقطع المحور فى نقطة م فالمطلوب البرهنة على أن ب م ص ط متوازى أضلاع

(مسألة ١١) اذا فرض أن ك ن ، ك نَ مماسان لقطع مكافئ ورسمنا ك م عمودا على المحور فالمطلوب البرهنة على أن ن نَ يقطع المحور فى نقطة ر بحيث تكون نقطة الرأس للقطع المكافئ منصفة للمستقيم م ر

(مسألة ١٢) اذا فرض أن ع ن وتر فى قطع مكافئ عمودى على المنحنى فى نقطة ع ، أن المماسين له فى نقطتى ع ، ن يتقاطعان فى نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن القطر المار بنقطة ك يمر بالطرف الثانى للوتر البورى المرسوم من نقطة ع

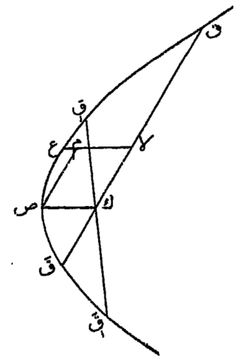
(مسألة ١٣) اذا فرض أن ط ن ، ط نَ مماسان لقطع مكافئ بورته نقطة ب وأن القطر المار بنقطة ط يقطع المنحنى فى نقطة ع فالمطلوب اثبات أن ب ن + ب نَ = ٢ ط ع + ٢ ع ب

(مسألة ١٤) اذا فرض أن (ن لا) أى احداثى رأسى للقطر الثابت (ع لا) فالمطلوب البرهنة على أن النقطة المنصفة للخط ن لا ترسم قطعا مكافئا

(مسألة ١٥) اذا فرض أن ن نَ أى وتر فى قطع مكافئ ومواز للماس فى نقطة ثابتة مثل نقطة ع وأخذت نقطة مثل نقطة ر على ن نَ بحيث يكون ن ر : ر نَ ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ر هو قطع مكافئ يمس القطع المكافئ المعلوم فى نقطة ع

(مسألة ١٦) مفروض قطع مكافئ مرسوم على الورق والمطلوب ايجاد البورة والدليل بواسطة استعمال المسطرة والبرجل

٤٦ — النظرية الثامنة عشرة — اذا تقاطع وتران لقطع مكافئ فان نسبة المستطيلين المكونين من أجزائهما الى بعضهما تساوى النسبة بين الوترين البوريين الموازيين لهما



لنفرض أن الوترين ق١ ق١َ ، ق قَ يتقاطعان فى نقطة ك ثم ننصف الوتر ق قَ بنقطة لا ونرسم من نقطة لا القطر ع لا ومن نقطة ك القطر ك ص ثم نرسم ص م احداثيا رأسيا للقطر ع لا فيكون

ق ك . ك قَ = ق لا^{2} — ك لا^{2} = ق لا^{2} — ص م^{2}

= ٤ ب ع . ع لا — ٤ ب ع . ع م

= ٤ ب ع (ع لا — ع م)

= ٤ ب ع . ص ك

وكذلك اذا رسمنا القطر ع١ لا١ منصفا للوتر ق١ ق١َ يكون

ق١ ك . ك ق١َ = ٤ ب ع١ . ص ك

∴ ق ك . ك قَ : ق١ ك . ك ق١َ = ٤ ب ع : ٤ ب ع١

ولكن الوترين البورين الموازيين للماسين فى نقطتى ع ، عَ هما ء ب ع ، ء ب عَ على التناظر [بمقتضى النظرية السادسة عشرة]

اذا رسمنا وترين لقطع مكافئ فى اتجاهين ثابتين فان الوترين البورين لهما لايتغيران بتغير وضع نقطة تقاطع الوترين المرسومين وبناء عليه فنسبة المستطيلين المتكونين من أجزاء أى وترين فى قطع مكافئ لاعلاقة لها بموقع نقطة تقاطع الوترين وحينئذ تكون مساوية لنسبة مربعى الماسين الموازيين لهما

٤٧ — النظرية التاسعة عشرة — اذا كانت دائرة تقطع قطعا مكافئا فى أربع نقط فان الخط الواصل بين أى نقطتين من نقط التقاطع يكوّن مع المحور زاوية مساوية للزاوية التى يكونها معه المستقيم الواصل بين النقطتين الأخريين

للبرهنة على ذلك نفرض ك ، ل ، م ، ن نقط التقاطع الأربعة ثم نقول ان الوترين ك ل ، م ن لايمكن أن يكونا متوازيين الا اذا كانا عمودين على المحور لأن المستقيم الواصل بين النقط المنصفة لأوتار متوازية فى دائرة عمود عليها واذا فبمقتضى النظرية الثالثة عشرة يلزم أن تكون الأوتار عمودية على محور القطع المكافئ

فلنفرض اذا أن الوترين ك ل ، م ن يتقاطعان فى نقطة و وحيث ان النقط الأربع واقعة على منحنى قطع مكافئ فيكون

و ك . و ل : و م . و ن = ب ع : ب عَ [بمقتضى النظرية الثامنة عشرة]

بفرض أن ب هى البورة ، ع ، عَ هما نهايتا الوترين المنصفين للمستقيمين ك ل ، م ن على التناظر ولكن بما أن النقط الأربع هى على محيط دائرة يكون

و ك . و ل = و م . و ن

فحينئذ يكون ب ع ، ب عَ متساويين ولا بد أن يكونا اذا متساويى الميل

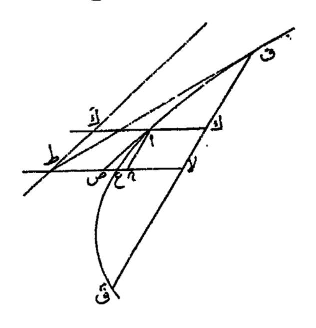
على المحور وفى جهتين متقابلتين منه وكذلك يكون المماسان فى نقطتى ع ، عَ زاويتين متساويتين مع المحور ويكونان موازيين للوترين ك ل ، م ن على التناظر

وبهذه الطريقة يمكن البرهنة على ان ك م ، ل ن وكذلك ك ن ، ل م متساويا الميل على المحور

فاذا كانت النقطتان ك ، ل منطبقتين على بعضهما أى متى كانت الدائرة مماسة للقطع المكافئ فان المماس فى نقطة ك والوتر م ن يكونان مع المحور زاويتين متساويتين وكذلك المستقيمان ك م ، ك ن يكونان مع المحور زاويتين متساويتين

و بالعكس النهايات الأربعة لأى وترين فى قطع مكافئ اللذين يكونان مع المحور زاويتين متساويتين ولكنهما غير متوازيين تكون واقعة على محيط دائرة

٤٨ — النظرية العشرون — * اذا رسم مستقيم من نقطة ثابتة قاطعا لمنحنى قطع مكافئ فان المماسين فى نقطتى التقاطع يتقاطعان على مستقيم ثابت



* يجب حذف قراءة بقية هذا الفصل فى الدراسة الأولى

للبرهنة على ذلك نرسم من النقطة الثابتة ك مستقيما يقطع القطع المكافئ فى نقطتى ق ، قَ ثم ننصف ق قَ فى نقطة لا فيكون المماسان فى نقطتى ق ، قَ متقاطعين فى نقطة ط الواقعة على القطر المرسوم من نقطة لا ويكون ط ع = ع لا

ثم نرسم من نقطة ك القطر ك ا كَ ونفرض أن المماس فى نقطة ا يقطع ط ع لا فى نقطة ص ثم نرسم ا ة موازيا للمستقيم ں ںَ فيكون ص ع = ع ة

وحينئذ يكون

ط ص = ط ع ــ ص ع = ع لا ــ ع ة = ة لا = ا ك

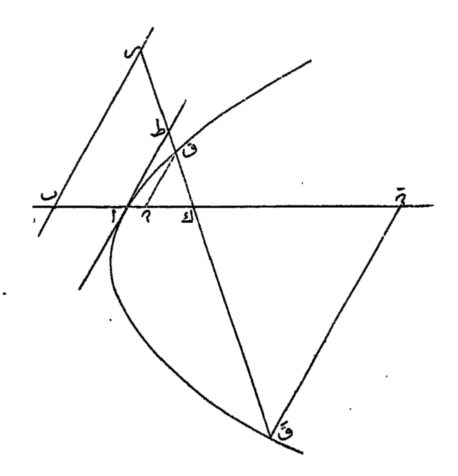
ومن ذلك نرى ان المستقيم المرسوم من نقطة ط موازيا للماس فى نقطة ا يقابل القطر ك ا فى نقطة ثابتة كَ بحيث يكون ا كَ = ص ط = ك ا فيتضح اذا أنه مهما كان اتجاه ق قَ تكون نقطة ط واقعة على مستقيم موازللماس فى نقطة ا ومار بنقطة كَ بحيث يكون ا كَ = ك ا ونرى فى الشكل أن نقطة ك واقعة داخل المنحنى واذا كانت خارجة عنه يمكن البرهنة على هذه النظرية بهذه الطريقة بعينها ولكن فى هذه الحالة يمكن رسم مستقيمين من نقطة ك كل منهما يقطع المنحنى فى نقطتين منطبقتين على بعضهما أى أن المستقيمين يكونان مماسين للمنحنى ومارين بنقطة ك فاذا انطبقت النقطتان ق ، قَ على بعضهما انطبقت عليهما نقطة ط أيضا واذا فالمحل الهندسى لنقطة ط يمر بنقطتى التماس لمماسى المنحنى المرسومين من نقطة ك .

ويمكن البرهنة بطريقة مشابهة للطريقة المتقدمة على عكس هذه النظرية وهو أنه اذا فرضت نقطة على مستقيم ثابت ورسم منها مماسان لمنحنى القطع المكافئ فان المستقيم الواصل بين نقطتى التماس يمر بنقطة ثابتة

تعريف — المستقيم الذى هو محل هندسى لنقطة تقاطع المماسين لقطع مكافئ فى نهايتى أى وترمار بنقطة ثابتـــة يسمى (المحور القطبى) للنقطة الثابتة وتسمى النقطة (قطب) هذا المستقيم بالنسبة لهذا المنحنى

وواضح من النظرية الخامســة أن الدليل هو قطبي البورة وأن البورة هى قطب الدليل

٤٩ — النظرية الحادية والعشــــرون — اذا رسم اى وتر لقطع مكافئ من النقطة الثابتة ك ليقطع المنحنى فى نقطتى ق ، قَ ويقطع قطبى نقطة ك فى ر ويقطع فى نقطة ط المماس للمنحنى فى نقطة ا التى هى نهاية القطر المرسوم من نقطة ك فانه يكون ط ك وسطا متناسبا بين ط ق ، ط قَ ويكون ر ك وسطا متناسبا توافقيا بين ر ق ، ر قَ



لانه بمقتضى النظرية الثامنة عشرة نسبة ط ق . ط قَ الى $\overline{\text{ط ا}}^2$ تساوى النسبة الكائنة بين مربعى المماسين الموازيين لهما

وبمقتضى نتيجة النظرية الخامسة عشرة تكون النسبة بين المماسين الموازيين للمستقيمين ط ك ، ط ا مساوية لنسبة المستقيمين ط ك الى ط ا المذكورين

وبناء عليه يكون ط ق . ط قَ : $\overline{\text{ط ا}}^2$ = $\overline{\text{ط ك}}^2$: $\overline{\text{ط ا}}^2$

∴ ط ق . ط قَ = $\overline{\text{ط ق}}^2$ ... ... (١)

ولنفرض أن القطر المرسوم من نقطة ك يقطع قطبي نقطة ك فى نقطة ب بحيث ان قطبي نقطة ك مواز للمستقيم ا ط فيكون

ك ط : ط م = ك ا : ا ب

وحيث ان ك ا = ا ب فيكون ك ط = ط م

ولكن بمقتضى (١) ط ق : ط ك = ط ك : ط قَ

∴ ط ق + ط ك : ط ك − ط ق = ط ك + ط قَ : ط قَ − ط ك

أى أنه بناء على أن ط ك = م ط

يكون م ق : ق ك = م قَ : ك قَ

∴ م ق : م ق = ق ك : ك قَ

= م ك − م ق : م قَ − م ك ... (٢)

وبناء عليه فان م ق ، م ك ، م قَ تكون متوالية توافقية

ثم نقول اذا كان ق ى ، قَ ىَ احداثيين رأسيين للقطر ا ك أى انهما موازيان للمستقيم ا ط يحدث

ا ى : ا ك = ط ق : ط ك

وأن ا ك : ا ىَ = ط ك : قَ

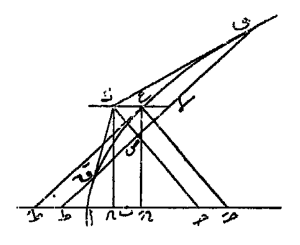
وبناء عليه ينتج بمقتضى (١)

ا ن : ا ك = ا ك : ا نَ

أو بعبارة أخرى ا ن . ا نَ = ا ك² ... ... (٣)

٥٠ — وهذه النتيجة مفيدة كثيرا ويمكن وضع النظريتين السابعة والثامنة بصورة عامة فنقول

اذا أنزل من نقطة مثل ك عمود ك ن على محور قطع مكافئ ورسم ك ص ح عمودا على قطبي نقطة ك بالنسبة لهذا المنحنى فيقطع القطبي فى نقطة ص ويقطع المحور فى نقطة ح ومدّ قطبي نقطة ك ليقطع المحور فى نقطة ط يكون ط ا = ا ن ، ب ط = ب حَ = ب ص ، ن ح = ٢ ا ب



ولنفرض ان القطر المار بنقطة ك يقطع المنحنى فى نقطة ع ويقطع القطبي فى نقطة لا

ونفرض ان المماس والعمودى فى نقطة ع يقطعان المحور فى طَ ، حَ على التناظر

ونفرض ان ع هَ هو الاحداثى الرأسى لنقطة ع

فيحدث طَ ط = ع لا = ك ع = ه هَ

ولكن طَ ا = ا هَ

∴ طَ ا − طَ ط = ا هَ − ه هَ

∴ ط ا = ا ه

ثم ان ح حَ = ك ع = ع لا = طَ ط

وكذلك طَ ب = ب حَ

∴ طَ ب − طَ ط = ب حَ − ح حَ

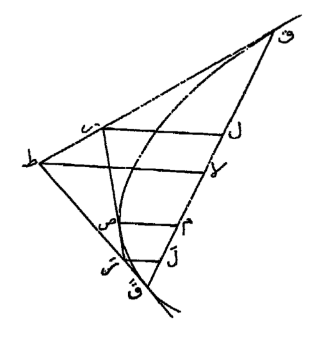
∴ ط ب = ب ح

= ب ص حيث ان ط ص ح زاوية قائمة

وكذلك المثلثان ك ه ح ، ع هَ حَ متساويان

∴ ه ح = هَ حَ = ٢ ا ب

٥١ — النظرية الثانية والعشرون — أى مماسين لقطع مكافئ يقسمهما أى مماس آخر أجزاء متناسبة



لنفرض ط ق ، ط قَ أى مماسين لقطع مكافئ ونفرض أن مماسا آخر يقطعهما فى نقطتى ر ، رَ على التناظر والمطلوب البرهنة على أن

ق ر : ر ط = ط رَ : رَ قَ

فلتكن ص نقطة التماس للماس ر رَ ونرسم أقطارا للمنحنى فى ر ، رَ ، ط ، ص فتقطع ق قَ فى ل ، لَ ، لا ، م على التناظر

فيحدث ل م = ½ ق م ، م لَ = ½ م قَ

∴ ل لَ = ½ ق قَ = ق لا

ومنه ينتج أن ق ل = لا لَ

وكذلك يكون ل لا = لَ قَ

فيحدث ق ر : ر ط = ق ل : ل لا

= لا لَ : لَ قَ

= ط رَ : رَ قَ

و يحدث أيضا أن

ر ص : ص رَ = ل م : م لَ = ق ل : ل لا

= ق ر : ر ط

(وبالعكس) اذا فرض أن مستقيمين ثابتين ط ق ، ط قَ يقطعهما مستقيم متحرك فى نقطتى ر ، رَ على التناظر بحيث يكون

ق ر : ر ط = ط رَ : رَ قَ

يكون المستقيم المتحرك دائما مماسا لمنحنى القطع المكافئ الذى يمس ط ق ، ط قَ فى نقطتى ق ، قَ

(نتيجة) من حيث ان ق ر : ر ط = ل م : م لَ

= ق م : م قَ

فينتج أن ر ط رَ م متوازى أضلاع

(مسائل على القطع المكافئ)

(١) اذا كان طول وتر قطع مكافئ مساويا لضعف البعد بين النقطة المنصفة له و بين الدليل فالمطلوب البرهنة على أن هذا الوتر يمر بالبورة

(٢) على القاعدة المعلومة ا ب قد رسم أى مثلث متساوى الساقين ا ب ع وعلى القاعدة ا ع قد رسم مثلث آخر متساوى الساقين ا ع ن مشابه للاول والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو قطع مكافئ بورته نقطة ا ودليله منصف للخط ا ب وعمود عليه

(٣) ا عبارة عن نقطة ثابتة ٥ ن أى نقطة مفروضة على مستقيم ثابت ورسم ن ع عمودا على المستقيم الثابت ورسم ا ع عمودا على ا ن والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع هو قطع مكافئ

(٤) ع ب عَ وتر بورى لقطع مكافئ ورسم مستقيمان من نقطتى ع ٥ عَ موازيين للمحور وقاطعين فى نقطتى ص ٥ صـ العمودين على المنحنى فى نقطتى ع ٥ عَ والمطلوب البرهنة على أن ع عَ صـ صـَ معين

(٥) اذا رسم مستقيم من نقطة الرأس فى قطع مكافئ عموديا على مماس المنحنى فى أى نقطة ع فقطع المستقيم المرسوم من نقطة ع موازيا للمحور فى نقطة ن فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو مستقيم عمودى على المحور

(٦) العمودى على قطع مكافئ فى نقطة ع يقطع المحور فى نقطة ح ورسم ب ے عمودى على المماس فى نقطة ع من البورة ثم مدّ ے ب على استقامته الى نقطة ر بحيث يكون ے ب = ب ر والمطلوب البرهنة على أن ع ے ر ح مستطيل وأن الدائرة ع ے ر ح تمر بنقطة رأس المنحنى

(٧) المطلوب البرهنة على أن العمودى ع ح على قطع مكافئ فى نقطة ع مساو للاحداثى الرأسى المنصف للمستقيم ع ح

(٨) اذا كانت نقطة ا نقطة الرأس لقطع مكافئ ، ع أى نقطة على المنحنى ثم رسم من نقطة ع مستقيم عمود على ع ا ليقطع المحور فى نقطة ح وأخذت نقطة ن على امتداد بحيث يكون ح ع = ع ن والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو قطع مكافئ بورته ا

(٩) اذا كان قطعان مكافئان لهما دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين نقطتى اشتراكهما مواز للمستقيمين الواصلين بين نقط تماس المماسين المشتركين وأنه فى منتصف المسافة بينهما

(١٠) اذا رسمت دائرة تمس محور قطع مكافئ وتمس البعد البورى ب ع لأى نقطة مثل ع وتمس أيضا القطر المار بنقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن مركز الدائرة لابد أن يقع على قطع مكافئ آخر أو على المماس للقطع المكافئ الأول فى نقطة الرأس

(١١) اذا كان ا ح ع قطاع دائرة معلومة مركزها ح ونصف قطرها ح ا ثابت ثم رسمت دائرة تمس القوس ا ع من الخارج وتمس أيضا امتداد ح ا ، ح ع فالمطلوب البرهنة على أن مركز هذه الدائرة مهما اختلف موضع نقطة ع واقع على أحد منحني قطع مكافئ

(١٢) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة تقاطع عمودين على قطع مكافئ فى نهايتى وتر بورى هو قطع مكافئ آخر

(١٣) ربط خيط غير محدود و ع ن فى نقطة و ، وفرض أن ع ، ن خرزتان صغيرتان ع ، ن تتحركان عليه فاذا كان الخيط دائما مشدودا وتتحرك الخرزتان بحيث يكون و ع دائما مساويا للبعد و ن وبحيث يكون اتجاه ع ن دائما ثابت فالمطلوب البرهنة على أن ع ، ن يتحركان على قوسين من قطعين مكافئين لهما بورة مشتركة ووتر بورى عمودى مشترك

(١٤) ع عبارة عن أى نقطة على قطع مكافئ بورته ب ورأسه ا ورسم عمود على ا ع من نقطة ب ليقطع فى نقطة ر المماس فى نقطة الرأس والمطلوب البرهنة على أن الاحداثى الرأسى لنقطة ع هو ٤ ا ر

(١٥) اذا فرضت نقطتان ثابتتان على محور فى قطع مكافئ متساويا البعد من البورة ثم أنزل منهما عمودان على مماس ما فالمطلوب البرهنة على أن فرق مربعى العمودين دائما ثابت .

(١٦) اذا رسم من أى نقطة ع على منحنى قطع مكافئ وتر يصنع مع المحور زاوية مساوية للزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى فى هذه النقطة فالمطلوب البرهنة على أن هذا الوتر يمس قطعا مكافئا ثابتا

(١٧) اذا كان ع د هو الاحداثى الرأسى لاى نقطة ع واقعة على منحنى قطع مكافئ وفرض أن المماس لهذا المنحنى فى نقطة ع يقطع المماس له فى نقطة الرأس فى ح والمطلوب البرهنة على أن د ح يمس قطعا مكافئا مساويا للاول

(١٨) اذا رسم مماسان لقطع مكافئ من نقطة و الخارجة عنه ورسم مماسان آخران له أيضا من نقطتى تقاطع المماسين الأولين مع الدليل فيقطعان المماسين المرسومين من نقطة و فى نقطتى ا ٦ س فالمطلوب البرهنة على أن ا س يمر بالبورة ب وأنه عمود على و ب

(١٩) ع اذا كانت ع نقطة على محيط دائرة ورسم منها ع د احداثيا رأسيا للقطر الثابت ا اَ ثم مدّ على استقامته الى نقطة ن بحيث يكون المربع المنشأ على ع د مساويا للمستطيل المكوّن من د ن و مستقيم معلوم فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو قطع مكافئ .

(٢٠) اذا كان ط ع ٦ ط ن مماسين لقطع مكافئ بورته ب فى نقطتى ع ٦ ن وكان ب ع + ب ن ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ط هو قطع مكافئ

(٢١) اذا كان ع ب عَ وترا بوريا لقطع مكافئ رأسه نقطة ا ثم رسم ا ع ، ا عَ ليقطعا الوتر البورى العمودى فى ن ، نَ على التناظر وكان ع ف ، عَ فَ الاحداثيين الرأسيين لنقطتى ع و عَ فالمطلوب البرهنة على أن ف ع ب ص ، فَ عَ ب ص متوازيا اضلاع

(٢٢) اذا فرض أن ط ن ، ط نَ مماسان لقطع مكافئ بورته ب وأن القطر المرسوم من نقطة ط يقطع المنحنى فى نقطة ع فالمطلوب اثبات أن

ط ن . ط نَ = ٤ ط ع . ط ب

(٢٣) اذا فرض أن منحنى قطع مكافئ يتدحرج على منحنى قطع مكافئ ثابت مساو له بحيث تنطبق رأساهما قبل التحرك فالمطلوب البرهنة على أن بورة المنحنى المتحرك ترسم فى أثناء الحركة دليل المنحنى الثابت وأن الوتر البورى العمودى فى المنحنى المتحرك والمماس له فى نقطة الرأس يمسان دوائر ثابتة

(٢٤) اذا فرض أن قطعين مكافئين لهما بورة مشتركة ثم رسم من أى نقطة على المماس المشترك المماسان الآخران للمنحنيين فالمطلوب البرهنة على أن الزاوية المحصورة بين هذين المماسين مساوية للزاوية المحصورة بين محورى المنحنيين

(٢٥) اذا رسم ط ع ، ط ن مماسين لقطع مكافئ وكان ع ن العمودى فى نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المرسوم من ب عمودا على ط ب منصف للمستقيم ط ن

(٢٦) اذا فرض أن جملة قطاعات مكافئة متساوية لها نقطة مشتركة وأن محاورها متوازية فالمطلوب البرهنة على أن رؤوسها واقعة على قطع مكافئ رأسه النقطة المعلومة

(٢٧) اذا علم الوتر البورى العمودى لقطع مكافئ واتجاه المحور ونقطة ثابتة على المنحنى والمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للبورة هو قطع مكافئ

(٢٨) المطلوب البرهنة على أن جميع القطاعات المكافئة التى لها دليل معلوم ونقطة معلومة تمس قطعا مكافئا ثابتا بورته النقطة المعلومة

(٢٩) المطلوب البرهنة على أن كل القطاعات المكافئة التى لها دليل مشترك والتى كل بورها واقعة على محيط دائرة ثابتة تمس قطعين مكافئين ثابتين

(٣٠) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقط التى فيها قطعان مكافئان مشتركان فى البورة يقابلان زوايا متساوية هو المستقيم المنصف للزاوية المحصورة بين الدليلين

(٣١) اذا فرض أن المثلث المكون من ثلاثة مماسات لقطع مكافئ متساوى الساقين فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين رأس المثلث والبورة يمر بنقطة تماس القاعدة

(٣٢) المطلوب البرهنة على أنه اذا رسم مثلث متساوى الاضلاع مماسة أضلاعه لقطع مكافئ من الخارج تكون المستقيمات الواصلة بين البورة ورؤس المثلث مارة بنقط التماس

(٣٣) اذا رسم شكل رباعى داخل دائرة فالمطلوب البرهنة على أن أحد أقطاره الثلاثة يمرّ ببورة القطع المكافئ الذى يمس أضلاعه

(٣٤) اذا فرض أن عمودين على منحنى قطع مكافئ فى ع ، ع$_1$ اللتين هما نهايتا وتر بورى يقطعان المحور فى ح ، ح$_1$ فالمطلوب البرهنة على ان العمود على ع ع$_1$ من منتصفه يمر بمنتصف ح ح$_1$

(٣٥) المطلوب البرهنة على أن القطعين المكافئين اللذين لهما محوران متوازيان لايتقاطعان الا فى نقطتين

(٣٦) اذا فرض أن العمودين على قطع مكافئ فى ع ، ع١ اللتين هما نهايتا وتر بورى يقطعان المحور فى حـ ، حـ١ على التناظر وأن المماسين فى نقطتى ع ، ع١ يتقاطعان فى ط فالمطلوب البرهنة على أن الدائرتين ب ع حـ ، ب ع١ حـ١ يتقاطعان فى نقطة مثل ر على امتداد ط ب بحيث يكون ط ب = ب ر

(٣٧) اذا فرض أن ا ب حـ مثلث مرسوم داخل منحنى قطع مكافئ ، اَ بَ حـَ مثلث آخر أضلاعه مماسات للمنحنى وموازية لاضلاع المثلث ا ب حـ فالمطلوب البرهنة على أن أضلاع المثلث ا ب حـ أربعة أمثال الاضلاع المناظرة لها فى المثلث اَ بَ حـَ

(٣٨) اذا رسم مماس لقطع مكافئ فى نقطة ع وقطع المحور فى نقطة ط وفرض أن الوتر ع ن والمماس ع ط يصنعان مع المحور زاويتين متساويتين فالمطلوب البرهنة على أن ع ن = ٤ ع ط

(٣٩) اذا رسم مماسان لقطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على ان العمود النازل من البورة على وتر التماس منصف لجزء المماس فى نقطة الرأس المحصور بين المماسين المذكورين

(٤٠) اذا مد الاحداثى الرأسي ق ع لنقطة ع الواقعة على منحنى قطع مكافئ على استقامته الى نقطة ن بحيث يكون ع ن = ع ب فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو قطع مكافئ يمس المماس للقطع المكافئ الأول فى نقطة الرأس ويكون القطر المناظر هو المماس للقطع المكافئ الأول فى نهاية الوتر البورى العمودى

(٤١) اذا فرض مماسان لقطع مكافئ أحدهما يمسه فى نقطة متغيرة ع والآخر فى نقطة ثابتة ن وأن المماسين يتقاطعان فى نقطة ط ثم قسمنا ع ط

بنسبة ثابتة بنقطة ر فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ر هو قطع مكافئ يمس القطع المكافئ المعلوم فى نقطة ن

(٤٢) المطلوب البرهنـة على أن غلاف ادلة القطاعات المكافئة التى لها رأس مشتركة مثل ا وتمر بنقطة ثابتة مثل ع هو قطع مكافئ طول وتره البورى العمودى مساو للمستقيم ا ع

(٤٣) المطلوب رسم مثلث داخل قطع مكافئ معلوم بحيث تكون أضلاعه موازية لثلاثة مستقيمات معلومة

(٤٤) اذا رسم مستقيم من نقطة ثابتة كنقطة ا ليقطع مستقيمين ثابتين ك ى ، ك هـ فى نقطتى ب ، ح على التناظر ثم فرضت نقطة عليه مثل ع بحيث يكون ا ح . ا ع = $\overline{ا ب}^{2}$ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع هو قطع مكافئ مار بنقطتى ا ، ك ومحوره مواز للمستقيم ك ى والماس له فى نقطة ا مواز للمستقيم ك هـ

(٤٥) المطلوب رسم دائرة داخل الجزء من القطع المكافئ المحدود بضعف الرأسى

(٤٦) اذا رسم مستقيم من نقطة ثابتة ك ليقطع قطعا مكافئا فى نقطتى ن ، نَ فالمطلوب البرهنة على أن المستطيل المكوّن من الاحداثيين الرأسيين لنقطتى ن ، نَ بالنسبة للقطر المـار بنقطة ك ثابت

(٤٧) اذا رسم وتران بوريان متعامدان فى قطع مكافئ وقطعا الدليل فى نقطتى ط ، طَ فالمطلوب البرهنة على أن منصفى الزاويتين الواقعتين بين المماسين المرسومين من احدى النقطتين ط ، طَ موازيان للماسين المرسومين من النقطة الثانية

(٤٨) اذا كان ا ب ح مثلثا متساوى الساقين مرسوما على قاعدة معلومة ا ب ثم رسم مماسان للدائرة ا ب ح فى نقطتى ا ، ح وتقاطعا

فى نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع هو قطع مكافئ بورته ا ومحوره منطبق على الخط ا ب ووتره البورى العمودى مساو للمستقيم ا ب

(٤٩) اذا ثنيت ورقة من كتاب بحيث صار أحد أركانها الخارجة منطبقا على جانب الورقة الداخل فالمطلوب البرهنة على أن خط الانثناء يغلف منحنى قطع مكافئ دليله الجانب الداخل المذكور

(٥٠) المطلوب البرهنة على أن المستقيم القاطع لمستقيمين ثابتين ك ا ، ك ب فى نقطتى ع ، ن على التناظر بحيث يكون ك ع + ك ن ثابتا يمس قطعا مكافئا ثابتا

(٥١) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الذى يقطع مستقيمين ثابتين بحيث يكون الفرق بين جزئى المستقيمين المنحصرين بين نقطة تقاطعهما والقاطع المذكور ثابتا يغلف دائما منحنى قطع مكافئ

(٥٢) اذا رسم داخل شكل كثير الاضلاع منتظم معلوم شكل آخر كثير الاضلاع منتظم عدد أضلاعه مساو للاول فالمطلوب البرهنة على أن غلاف كل ضلع من الاضلاع هو قطع مكافئ

(٥٣) اذا رسم مستقيم قاطع دائرتين معلومتين بحيث يكون الوتران اللذان يحدثهما متساويين فالمطلوب البرهنة على أن هذا المستقيم يغلف قطعا مكافئا

(٥٤) المطلوب البرهنة على أن جميع أوتار القطع المكافئ التى منتصفاتها واقعة على مستقيم عمود على محور القطع المكافئ تمس قطعا مكافئا آخر

(٥٥) اذا رسم وتر لقطع مكافئ بحيث يقابل زاوية قائمة رأسها فى رأس المنحنى فالمطلوب البرهنة على أنه يقطع المحور على مسافة من الرأس تساوى الوتر البورى العمودى

(٥٦) اذا فرض أن ن نَ أى وتر فى قطع مكافئ ورسم من نقطة ن مماس وفرض قطر يقطع المماس المذكور فى نقطة ط ويقطع المنحنى فى نقطة ع والوتر ن نَ فى نقطة ص فالمطلوب اثبات أن

ط ع : ع ص = ن ص : ص نَ

(٥٧) المطلوب رسم وتر لقطع مكافئ من نقطة معلومة داخله بحيث يكون منقسما بهذه النقطة قسمين بنسبة معلومة

(٥٨) اذا فرض أن المماس لقطع مكافئ فى نقطة ع يقطع مماسين آخرين له من نقطة ك فى نقطتى ا ، ب ويقطع القطر المار بنقطة ك فى نقطة ح فالمطلوب البرهنة على أن ا ع = ح ب

(٥٩) اذا فرض أن أى وتر ع ن فى قطع مكافئ يقطع المحور فى نقطة ك فالمطلوب اثبات ما يأتى

$$\overline{ع ن}^٢ = \overline{ا ع}^٢ + \overline{ا ن}^٢ + ٢ \, \overline{ر ك}^٢ - ٢ \, \overline{ا ك}^٢$$

مع فرض أن ا نقطة الرأس ، ر ك الاحداثى الرأسى المار بنقطة ك

(٦٠) اذا رسم مماسان فى نهايتى وتر لقطع مكافئ وتقاطعا فى نقطة ط وكانت طَ هى النقطة المناظرة لنقطة ط للوتر العمودى على الوتر الأول فالمطلوب البرهنة على أن المستطيل المتكون من الاحداثيين الافقيين لنقطتى ط ، طَ يساوى المستطيل المتكون من جزئى المماس فى نقطة الرأس اللتين يحددها الوتران

(٦١) اذا علم من منحنى قطع مكافئ نقطة ومماس واتجاه المحور فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للبورة هو قطع مكافئ آخر

(٦٢) اذا رسم قطعان مكافئان يمسان أضلاع مثلث وكانت بورتاهما نهايتى قطر الدائرة المرسومة حوله . فالمطلوب البرهنة على أن محورى القطعين

المكافئين يتقاطعان على محيط الدائرة المرسومة حول المثلث وان المماسين لهما فى نقطتى الرأس يتقاطعان على محيط دائرة التسع النقط فى هذا المثلث

(٦٣) اذا فرضت نقطتان ثابتتان ا ، ب على محور قطع مكافئ ورسم منهما الوتران ع ا ن ، ع ب ر ثم وصلنا ن ر ليقطع المحور فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن نسبة ط ن : ط ر لاعلاقة لها بوضع نقطة ع

(٦٤) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تقطع مستقيما معلوما ومحيط دائرة معلوم بحيث يكون الوتران المتكونان متساويين ولهما طول ثابت هو قطع مكافئ

(٦٥) اذا فرض أن المماس لقطع مكافئ فى نقطة ع يصنع مع المحور زاوية مساوية للزاوية التى بين المحور ومستقيم آخر واصل بين البورة ونقطة تقاطع مماسين آخرين فى نقطتى ن ، ر فالمطلوب البرهنة على أن هذا الارتباط متماثل وأن الدائرة المرسومة حول المثلث المكون من المماسات الثلاثة تمس محور القطع المكافئ

(٦٦) اذا فرض ان ع ب عَ وتر بورى لقطع مكافئ وأن ح نقطة منصفة للمستقيم ع عَ ورسم ح حـ عمودا على ع ب عَ ليقطع المحور فى نقطة حـ فالمطلوب البرهنة على أن ب حـ ، ح حـ هما الوسط المتناسب العددى والوسط المتناسب الهندسى بين ب ع ، ب عَ

(٦٧) اذا كان ك ا ، ك ب مماسين لقطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على أن محيطى الدائرتين المارين بنقطة ك والمماسين للمستقيم ا ب فى نقطتى ا ، ب على التناظر يتقاطعان على القطر المار بنقطة ك ويكون مركزاهما على الدليل

(٦٨) اذا رسمنا دائرة مركزها نقطة معلومة فقطعت مستقيمين متوازيين ثابتين فى نقطتى ا ، اَ ونقطتى ب ، بَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمات ا ب ، ا بَ ، اَ ب ، اَ بَ كلها تمس قطعا مكافئا ثابتا

(٦٩) ع عبارة عن أى نقطة مفروضة على منحنى قطع مكافئ بورته ب ثم أخذت نقطة عَ على امتداد ع ب بحيث يكون ع ب = ب عَ ورسم مماسان عَ ن ، عَ ر مماسين للمنحنى والمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة ع ن ر يمس القطع المكافئ فى نقطة ع ويمر بنقطة عَ

(٧٠) اذا فرض أن قطاعين مكافئين لهما بورة مشتركة ومحوراهما فى جهتين متقابلتين من البورة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقط المنصفة للأوتار فى أيهما المماسة للمنحنى الآخر هو قطع مكافئ آخر

(٧١) المطلوب البرهنة على أن النقط الثلاثة المنصفة لأقطار أى شكل رباعى واقعة على مستقيم مواز لمحور القطع المكافئ الذى يمس أضلاع الشكل الرباعى المذكور

(٧٢) اذا فرض قطعان مكافئان متساويان ومتماثلا الوضع ولهما محور واحد ثم رسم مماس للمنحنى الداخلى فى نقطة ن فقطع المنحنى الخارجى فى نقطتى ع ، عَ فالمطلوب البرهنة على أن ن هى النقطة المنصفة للمستقيم ع عَ وأن البعد بين القطرين المارين بنقطتى ع ، عَ ثابت لجميع أوضاع نقطة ن

(٧٣) اذا فرض قطعان مكافئان متحدان فى البورة والمحور ورسم مستقيم مواز للمحور فقطعهما فى نقطتى ع ، عَ ورسم لهما مماسان فى ع ، عَ فتقاطعا فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن نقطة ط واقعة فى منتصف المسافة بين الدليلين وأن ط ب منصف للزاوية الخارجة غ ب عَ

(٧٤) اذا فرض مماسان لقطعين مكافئين متحدين فى البورة والمحور ورسم لكل منهما مماس فى نقطة فتقاطعا فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن نقطة ط اذا كانت على بعدين متساوين من القطرين المارين بنقطتى التماس تكون أيضا على بعدين متساويين من الدليلين

(٧٥) اذا فرض قطعان مكافئان متحدان في البورة والمحور ورسم من نقطة خارجة عنهما مماسان ولكل من المنحنيين ووصل وترا التماس ع ع ٯ ں ںَ فالمطلوب البرهنة على أنه اذا كانت ع ٯ ں ٯ ب واقعة على خط مستقيم فان عَ ٯ ںَ ٯ ب تكون كذلك على خط مستقيم وأن ع ںَ ٯ ں عَ يكونان موازين للمحور

(٧٦) اذا رسم محيط دائرة مار ببورة قطع مكافئ ومماس للمنحنى في نقطة ع ويقطعه فى نقطتى ل ٯ م ويقطع المحور في نقطة ن فالمطلوب البرهنة على أن ل ع = م ن

(٧٧) اذا فرض أن ع ں عبارة عن وتر قطع مكافئ عمودى عليه في نقطة ع ورسم ں ر موازيا للمحور فقطع امتداد ضعف الرأسى ع عَ في نقطة ر فالمطلوب البرهنة على ان المستطيل المكوّن من ع عَ ٯ عَ ر ثابت

(٧٨) اذا فرض أن ط ا ٯ ط اَ مماسان لقطع مكافئ ٯ ع نقطة أخرى على المنحنى ورسم مماس في نقطة ع فقطع القطرين المارين بنقطتى ا ٯ اَ في إ ٯ إَ على التناظر ورسم أيضا من نقطة ع مستقيمان موازيان للماسين في نقطتى ا ٯ اَ فقطعا القطرين المارين بنقطتى اَ ٯ ا في نقطتى ںَ ٯ ں على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ں ںَ مواز للماس في نقطة ع وأنه اذا كانت نقطة ك قطب المستقيم ں ںَ يكون ك إ ٯ ك إَ موازيين للماسين في نقطتى اَ ٯ ا على التناظر

(٧٩) اذا فرض أن المثلث ا ب حـ مكون من ثلاثة مماسات لقطع مكافئ وأن المثلث ء هـ و مكوّن من المستقيمات الواصلة بين نقط تقاطع الاوتار المارة بنقطتين من نقط التماس مع القطر المار بنقطة التماس الثالثة فالمطلوب البرهنة على أن ا ٯ ب ٯ حـ هى النقط المنصفة لاضلاع المثلث ء هـ و

(٨٠) اذا رسمت دائرة قطرها ا ب الذى هو وتر فى قطع مكافئ فقطعت المنحنى فى نقطتى ح ، ى فالمطلوب البرهنة على أنه اذا كان اتجاه الوتر ا ب ثابتا يكون الفرق بين مربعى ا ب ، ح ى ثابتا .

(٨١) اذا رسم مماس لقطع مكافئ فى نقطة ع ورسم مماسان آخران فقطعا الأول فى نقطتى ر ، رَ ورسم الوتر الواصل بين نقطتى التماس الأخيرتين فقطع القطر المار بنقطة ع فى نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن ر ع . ر عَ = ب ع . ع ك مع فرض أن ب بورة المنحنى

(٨٢) اذا رسم المماسان ط ن ، ط ر لقطع مكافئ ورسم مماس فى نقطة ع فقطع المماسين الأولين فى نقطتى س ، ص على التناظر ثم رسم ط و موازيا للمحور فقطع المنحنى فى نقطة و فالمطلوب البرهنة على أن المماس فى نقطة و يمر بالنقطة المنصفة للمستقيم س ص وأنه بفرض ب هى البورة يكون $\overline{\text{س ص}}^2$ = ٤ ب ع . ط و

(٨٣) اذا فرض أن مماسين ثابتين لقطع مكافئ يقطعهما مماس متغير فى نقطتى س ، ص فالمطلوب بيان أنه اذا رسم وتر لهذا القطع المكافئ مساو وموازٍ للمستقيم س ص فانه يكون غلافا لقطع مكافئ مساو للقطع المكافئ المذكور

(٨٤) اذا فرض أن ع ن وتر بورى فى قطع مكافئ ، ر أى نقطة مفروضة على القطر المار بنقطة ن فالمطلوب البرهنة على أن الوتر البورى الموازى للمستقيم ع ر = $\frac{\overline{\text{ع ر}}^2}{\text{ع ن}}$.

(٨٥) اذا رسم من نقطة على منحنى قطع مكافئ وتران متساويا الميل على المماس فى هذه النقطة فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين طول الوترين مساوية للنسبة بين جزئى القطرين المنحصرين بين الوترين والمنحنى

(٨٦) اذا فرض أن ع عَ وتر بورى فى قطع مكافئ ورسم عمودان على المنحنى فى نقطتى ع ، عَ فقطعاه فى نقطتين اخريين ن ، نَ فالمطلوب البرهنة على أن ن نَ مواز للمستقيم ع عَ

(٨٧) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لبورة قطع مكافئ يمس مستقيمين معلومين ودليله يمر بنقطة معلومة هو محيط دائرة

(٨٨) اذا فرض أن ك ن ، ك نَ مماسان لقطع مكافئ ورسم من نقطة ك قطر للمنحنى فقطعه فى ع وقطع ن نَ فى ح فالمطلوب بيان أنه اذا كان المماس فى ع يقطع ك ن ، ك نَ فى م ، مَ على التناظر فانّ المنحنى يقسم كلا من ن مَ ، نَ م بنسبة ٨ : ١

(٨٩) اذا رسمت دائرتان تمس كل منهما قطعا مكافئا فى نهايتى ضعف رأسى فالمطلوب البرهنة على أن مجموع طول المماسين للدائرتين من أى نقطة على منحنى القطع المكافئ أو الفرق بينهما ثابت ومساو للبعد بين وترى التماس

(٩٠) اذا فرض قطع مكافئ ودائرتان تمس كل منهما المنحنى فى نقطتين فالمطلوب البرهنة على أن محورهما الأصلى واقع فى منتصف المسافة بين وترى التماس

(٩١) اذا فرض أن ع ، ن ، م ، س أربع نقط على منحنى قطع مكافئ ثم وصلنا ع ن فقطع القطر المار بنقطة م فى مَ ووصلنا م س فقطع القطر المار بنقطة ن فى نَ فالمطلوب البرهنة على أن نَ مَ مواز للمستقيم ع س

(٩٢) المطلوب البرهنة على أن المحور القطبى للنقطة المنصفة للوتر العمودى على منحنى قطع مكافئ يقطع البعد البورى لنقطة تقاطع الوتر والدليل على العمودى فى الطرف الثانى للوتر

(٩٣) المطلوب البرهنة على أن محورى القطعين المكافئين اللذين يمران بأربع نقط معلومة على محيط دائرة يكونان متعامدين ومتقاطعين فى مركز الثقل للنقط الأربعة

(٩٤) المطلوب البرهنة على أنه اذا تقاطع قطعان مكافئان فى أربع نقط واقعـة على محيط دائرة فان محوريهما يلزم أن يكونا متعامدين وبالعكس اذا كان محور قطع مكافئ عمودا على محور قطع مكافئ آخر وتقابل المنحنيان فى أربع نقط فان هذه النقط تكون واقعة على محيط دائرة

(٩٥) اذا فرض أن مماسا متحركا لقطع مكافئ معلوم يقطع مماسا ثابتا فى نقطة ع فالمطلوب البرهنـة على أن العمود من نقطة ع على المماس المتحرك يغلف قطعا مكافئا آخر

(٩٦) اذا رسمت دائرة قطرها وتر من أوتار قطع مكافئ فقطعت المنحنى فى نقطتين أخريين فالمطلوب البرهنة على أن جزء المحور المحصور بين الوترالأصلى والوتر الواصل بين نقطتى تقاطع الدائرة بالمنحنى مساو للوتر البورى العمودى

(٩٧) اذا رسم مثلث داخل منحنى قطع مكافئ ومددنا كل ضلع من الأضلاع الثلاثة على استقامته فقطع المماس للمنحنى فى الرأس المقابل له فالمطلوب البرهنة على أن نقط التقاطع الثلاثة واقعة على خط مستقيم

(٩٨) المطلوب البرهنـة على أن النسـبة بين أجزاء مماس القطع المكافئ الناشئة من تقاطعه مع ثلاثة مماسات ثابتة هى ثابتة

(٩٩) اذا فرض أن ط ع ، ط ى مماسان لقطع مكافئ فالمطلوب البرهنة على أن العمودى من نقطة ط على أى مماس آخر وسط متناسب بين بعدى ع ، ى العموديين عن هذا المماس

(١٠٠) اذا رسمت أربعة مماسات لقطع مكافئ لتكوّن شكلا رباعيا ورسمت الأقطار الثلاثة لهذا الشكل وفرض أن نهاياتها هى ا ، اَ . ب ، بَ . حـ ، حـَ فالمطلوب البرهنة على أن حاصل ضرب العمودين النازلين على أى مماس من نقطتى ا ، اَ يساوى حاصل ضرب العمودين النازلين من ب ، بَ أو من حـ ، حـَ على هذا المماس

الفصل الثـالث

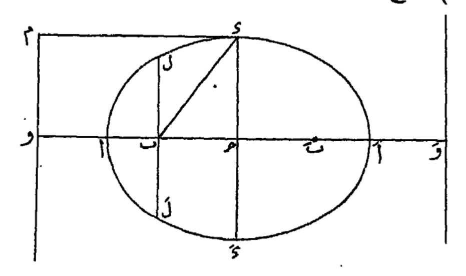
القطع النـاقص

٥٢ — القطع الناقص هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو مشتمل على نقطة معلومة تسمى البورة ومستقيم معلوم يسمىٰ الدليل ويكون تحركها بكيفية مخصوصة بحيث ان نسبة بعدها عن البورة الى بعدها عن الدليل تكون ثابتة دائمـا وأصغر من الوحدة وقد أثبتنا فى الفصل الاول أنه يستنتج من هذا التعريف أن القطع الناقص متماثل بالنسبة للعمود النازل من البورة على الدليل وأثبتنا أيضا أنه اذا كان العمود المستقيم المذكور يقطع المنحنى فى نقطتى ا ، اَ وفرضنا أن حـ هى النقطة المنصفة للمستقيم ا اَ فان منحنى القطع الناقص يكون متماثلا بالنسبة للمستقيم المرسوم من نقطة حـ موازيا للدليل ومن ذلك ينتج أن القطع الناقص له بورة أخرى على الخط ا اَ ودليل آخر عمود على هذا الخط

واذا رمزنا للبورتين بحرفى ب ، بَ ومددنا المسـتقيم ا اَ على استقامته ليقطع الدليلين فى نقطتى و ، وَ على التناظر فقد تقدّم البرهان أيضا على أن

حـ ب : حـ ا = حـ ا : حـ و = ب ا : ا و

المسـتقيمان المحدودان ا اَ ، ى ىَ يسميان (المحور الأكبر) و (المحور الأصغر) للقطع الناقص على التناظر



وانرسم ء م عمودا على الدليل من نقطة ء فيكون

ب ء : ء م = ب ا : ا و = حـ ا : حـ و

وحيث ان ء م = حـ و فيكون ب ء = حـ ا

وحينئذ يكون $\overline{ء حـ}^٢ = \overline{ء ب}^٢ - \overline{حـ ب}^٢ = \overline{حـ ا}^٢ - \overline{حـ ب}$

وواضح أن $\overline{حـ ا}^٢ - \overline{حـ ب}^٢ = (حـ ا - حـ ب)(حـ ا + حـ ب)$

= ا ب . ب اَ لأن حـ ا = حـ اَ

وواضح أيضا أن $\overline{حـ ا}^٢ - \overline{حـ ب}^٢ = حـ ب . حـ و - \overline{حـ ب}^٢ = حـ ب . ب و$

وحينئذ يكون ($\overline{ء حـ}^٢ = \overline{حـ ا}^٢ - \overline{حـ ب}^٢ = ا ب . ب اَ = حـ ب . ب و$)

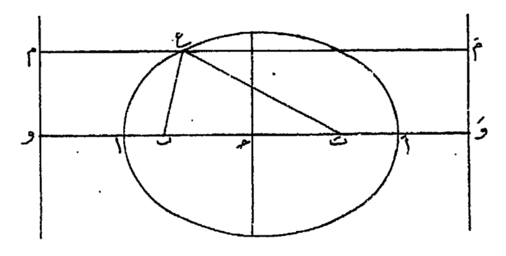
واذا فرضنا أن ل ب لَ هو الوتر البورى العمودى يكون

ب ل : ب و = ب ا : ا و = حـ ب : حـ ا

∴ ($ب ل . حـ ا = حـ ب . ب و = \overline{ء حـ}^٢$)

ومن ذلك يتضح أن نصف المحور الأصغر وسط متناسب بين نصف المحور الأكبر ونصف الوتر البورى العمودى

٥٣ — النظرية الاولى — مجموع البعدين البوريين لأى نقطة على منحنى قطع ناقص ثابت



لنفرض ب ، بَ بورتى القطع النـاقص ، ع أى نقطة على المنحنى ثم نصل ب ع ، بَ ع وننزل من نقطة ع المستقيم م ع مَ عمودا على الدليلين ومنتهيا بهما

فاذن ب ع : م ع = حـ ا : حـ و

ويكون بَ ع : ع مَ = حـ ا : حـ و

∴ ب ع + بَ ع : م ع + ع مَ = حـ ا : حـ و

ولكن م ع + ع مَ = م مَ = و وَ = ٢ حـ و

وحينئذ يكون ب ع + بَ ع = ٢ حـ ا

واذا فرضت نقطة خارجة عن المنحنى كنقطة ن مثلا فمن السهل البرهنـة على أن ب ن + بَ ن أكبر من ٢ حـ ا

لأنه بفرض أن ب ن يقطع المنحنى فى نقطة ع يكون

ب ن + بَ ن = ب ع + ع ن + بَ ن > ب ع + ع بَ

وكذلك اذا فرضت نقطة ن داخل المنحنى يكون ب ن + بَ ن < ٢ حـ ا

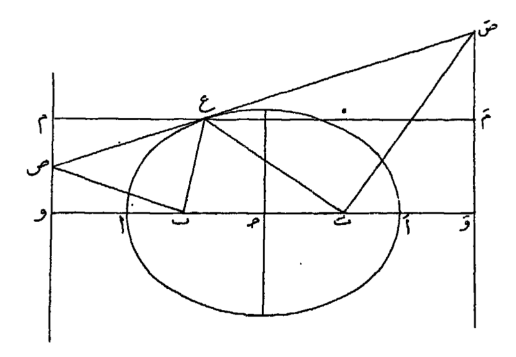
و يمكننا بواسـطة الخاصـة السالفة الذكر رسم منحنى القطع النـاقص بواسطة نقطة متحركة تحركا مستمرا

وذلك أننا نأخذ خيطا له طول محدود ونربط طرفيه فى نقطتين مثـل ب ، بَ ثم نشـدّ الخيط بقلم رصاص ونرسم المنحنى . فلو فرضـنا ع أى نقطة من النقط التى يرسمها القـلم الرصـاص يكون ب ع + بَ ع ثابتا ومساو يا لطول الخيط وتكون نقطة ع اذا واقعـة على منحنى قطع ناقص بورتاه ب ، بَ ومحوره الأكبر مساو لطول الخيط

٥٤ — النظرية الثانية — المماس لمنحنى قطع ناقص فى أى نقطة متساوى الميل على البعدين البوريين لهذه النقطة

وللبرهنة على ذلك نفرض ب ، بَ بورتى القطع الناقص ، ع نقطة على المنحنى

ثم نرسم من نقطة ع المستقيم م ع مَ عمودا على الدليلين ومنتهيا بهما ونفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الدليلين فى نقطتى ص ، صَ



ثم نصل ب ع ، بَ ع ، ب ص ، بَ صَ

فيؤخذ من تشابه المثلثين م ع ص ، مَ ع صَ أن

ص ع : ع صَ = م ع : ع مَ

= ب ع : بَ ع

وواضح بمقتضى بند ١٢ أن الزاويتين ص ب ع ، صَ بَ ع قائمتان وحينئذ فالمثلثان ص ع ب ، صَ ع بَ متشابهان ويؤخذ من تشابههما أن

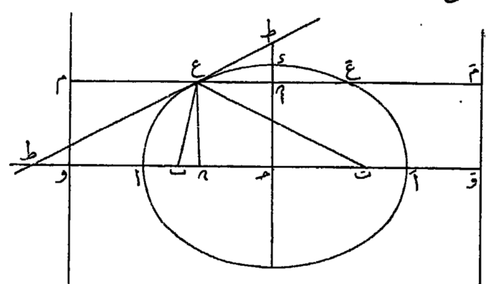
ـــ ب ع ص = ـــ بَ ع صَ

ومن ذلك نرى أن المماس للقطع الناقص فى نقطة ع ينصف الزاوية الواقعة بين ب ع وامتداد بَ ع

وحيث ان العمودى على المنحنى عمود على المماس فيكون العمودى المذكور منصفا للزاوية ب ع بَ

٥٥ ــ النظرية الثالثة ــ اذا كان المماس لقطع ناقص فى نقطة مّا مثل ع يقطع امتداد المحور الاكبر حـ ا فى نقطة ط وكان ع ن عمودا على المحور يكون حـ ن . حـ ط = $\overline{\text{حـ ا}}^{2}$

وللبرهنة على ذلك نرسم م ع مَ موازيا للمحور الأكبر فيقطع الدليلين فى نقطتى م ، مَ



فحيث ان ط ع منصف للزاوية الخارجة ب ع بَ فيكون

ب ط : بَ ط = ب ع : بَ ع

= ع م : مَ ع = ن و : وَ ن

∴ ب ط + بَ ط : بَ ط ــ ب ط = ن و + وَ ن : وَ ن ــ ن و

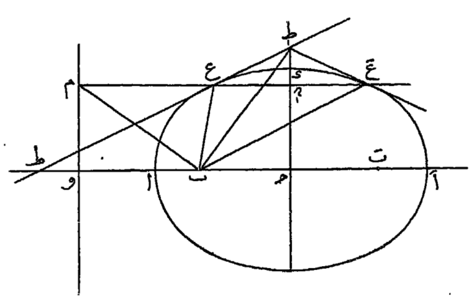
أى أن ٢ حـ ط : ٢ حـ ب = ٢ حـ و : ٢ حـ ن

وعليه يكون حـ ط × حـ ن = حـ ب × حـ و = $\overline{\text{حـ ا}}^{2}$

٥٦ — النظرية الرابعة — اذا فرض أن المماس لقطع ناقص فى نقطة ما مثل ع يقطع امتداد المحور الأصغر حـ ى فى نقطة ط١ وكان ع ى١ عمودا على المحور يكون حـ ى١ × حـ ط١ = حـ ى²

وللبرهنة على ذلك نمد ع ى١ على استقامة ليقطع المنحنى فى نقطة أخرى ولتكن عَ مثلا ويقطع الدليـــل فى نقطة م فحيث ان كل وتر عمودى على هـــذا المحور الاصغر ينصفه المحور المذكور يستنتج من ذلك كما فى بند ١٨ نتيجة ٢ أن المماسين فى نقطتى ع ، عَ يتقاطعان على المحور الأصغر واذا يتقاطعان فى نقطة ط١ وواضح بمقتضى بند ١٠ وبند ١٧ أن ب م ، ب ط١ هما المنصف الخارجى والمنصف الداخلى على التناظر للزاوية ع ب عَ واذا فهما متعامدان

وحينئذ تكون ∠ حـ ب ط١ = الزاوية المتممة للزاوية و ب م
= ∠ ب م و



وحينئذ يكون المثلثان القائما الزاوية حـ ب ط١ ، و م ب متشابهين ويكون

حـ ط١ : حـ ب = ب و : و م = ب و : حـ ى١

∴ حـ ط١ × حـ ى١ = حـ ب × ب و = ى حـ²

مسـائل

(١) اذا علمت بورة قطع ناقص وطول المحور الاكبر ونقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للمركز هو محيط دائرة

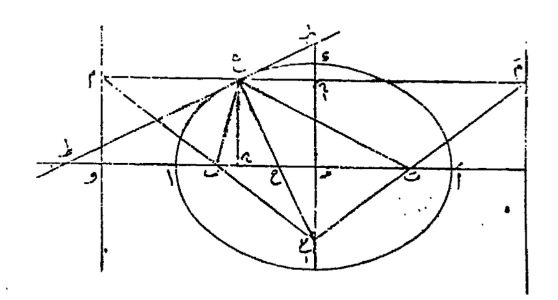
(٢) معلوم بورة قطع ناقص والدليل المناظر لهـا ومعلوم أيضا أن مستقيما معلوما يمس المنحنى المذكور والمطلوب ايجاد البورة الثانية

(٣) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز قطع ناقص معلوم بورته ويمس مستقيما معلوما فى نقطة معلومة

(٤) اذا فرض أن عدة قطاعات ناقصـة لهـا محور اكبر مشترك ورسم مستقيم عمودى على هذا المحور ليقطع المنحنيات المذكورة فالمطلوب البرهنة على أن المماسات المرسومة من جميـع نقط التقاطع تتقاطع فى نقطة على المحور الأكبر

(٥) اذا فرض أن المماس لقطع ناقص فى نقطة منـه مثل ع والاحداثى الرأسى لهذه النقطة يقطعان المحور الاكبر ح ا فى نقطتى ط ، ى على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ى ا أصغر من ا ط

٥٧ ــ النظرية الخـامسة ــ اذا كان العمودى على منحنى قطع ناقص فى نقطة منه مثل ع يقطع المحور الاكبر والاصغر فى نقطتى خ ، خ١ على التناظر تكون النسبة ع خ : ع خ١ ثابتة وكذلك اذا رسم ع ى ، ع ى١ عمودين على المحور الاكبر والمحور الاصـغر على التناظر تكون النسبتان ح ع : ح ى ، ح خ : ح ى١ ثابتتين



وللبرهنة على ذلك نصل ع بالبورتين ب ، بَ ثم نرسم من نقطة ع المستقيم م ع مَ عمودا على الدليلين ومنتهيا بهما. وحيث أن م مَ ، ب بَ ينصفهما المحور الاصغر فينتج من ذلك أن امتداد المستقيمين م ب ، مَ بَ يتقاطعان على المحور الاصغر ولنفرض نقطة التقاطع ع١ ثم نصل ع ع١ فيقطع المحور الاكبر فى نقطة ح

فيكون ب ح : م ع = ح ع١ : ع ع١ = ح بَ : ع مَ

∴ ب ح : ح بَ = م ع : ع مَ

= ب ع : ع بَ

وحينئذ يكون ع ح ع١ منصفا للزاوية ب ع بَ واذا فيلزم أن يكون هو العمودى فى نقطة ع [بمقتضى النظرية الثانية]

ثم ينتج من تشابه المثلثين أن

ع ح : ع ع١ = م ب : م ع١ = و ب : و ﺣ

∴ ع ح : ع ع١ = ﺣ ب . ب و : ﺣ ب . ﺣ و = $\overline{\text{ﺣ ء}}^2$: $\overline{\text{ﺣ ا}}^2$

ثم ان ح ع : ح ق = ح ع : ق١ ع = ع ع١ : ع ع١
= ب ع١ : م ع١
= ح ب : ح و

وكذلك ح ع١ : ح ق١ = ع١ ع : ع ع = ع١ ب : ب م
= ح ب : ب و

٥٨ ــ النظرية السادسة ــ محيط الدائرة المار ببؤرتى قطع ناقص ونقطة مّا على المنحنى مثل نقطة ع يمر بنقط تقاطع المحور الاصغر مع المماس والعمودى فى نقطة ع المذكورة

وللبرهنة على ذلك نفرض أن محيط الدائرة ب ع بَ يقطع المحور الأصغر فى نقطتين ط١ ، ع١ فواضح أن هاتين النقطتين واقعتان فى جهتين متقابلتين بالنسبة للمستقيم ب بَ ولنفرض أن نقطتى ع و ع١ فى جهتين متقابلتين بالنسبة للمستقيم ب بَ

فحيث ان المستقيم ط١ ع١ منصف للمستقيم ب بَ وعمود عليه فهو اذا قطر للدائرة والقوسان ب ع١ ، بَ ع١ يلزم أن يكونا متساويين وبناء عليه فالزاويتان ب ع ع١ ، بَ ع ع١ متساويتان ويستنتج من ذلك أنّ ع ع١ هو العمودى فى نقطة ع وحيث ان ط١ ع١ قطر للدائرة فتكون الزاوية ط١ ع ع١ زاوية قائمة ويكون اذا ع ط١ هو المماس للمنحنى فى نقطة ع

نتيجة ــ حيث ان النقط ب ، بَ ، ع١ ، ط١ واقعة على محيط دائرة
فيكون ع١ ح . ح ط١ = بَ ح . ح ب = ح ب٢

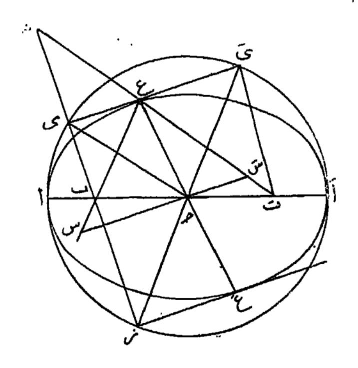
وكذلك حيث ان المثلثين ع ح ع١ ، ط١ ح ط متشابهان
فيكون ح ع : ع١ ح = ح ط١ : ح ط

وعليه يكون ح ع . ح ط = ع١ ح . ح ط١ = بَ ح . ح ب = ح ب٢

٥٩ ــ النظرية السابعة ــ المطلوب البرهنة على أن موقعى العمودين النازلين من بورتى قطع ناقص على مماس له فى أى نقطة منه واقعان على محيط دائرة ثابتة وأن نصف المحور الاصغر وسط متناسب بين طولى العمودين

للبرهنة على ذلك نفرض ب ى ، بَ ىَ العمودين النازلين من البورتين على المماس فى نقطة ع

ثم نصل ب ع ، بَ ع ونمد بَ ع ، ب ى على استقامتهما فيتقاطعان فى نقطة هـ ثم نصل حـ ى



فيكون ∠ ب ع ى = ∠ بَ ع ىَ = ∠ هـ ع ى

وكذلك ∠ ب ى ع = زاوية قائمة = ∠ هـ ى ع

والضلع ع ى مشترك بين المثلثين ب ع ى ، هـ ع ى

وحينئذ فالمثلثان ب ع ى ، هـ ع ى متساويان ومنه ينتج

ب ى = ى هـ ، ب ع = ع هـ

وعليه يكون بَ هـ = بَ ع + ع هـ = بَ ع + ع ب = ٢ حـ ا

ولكن حيث ان ب هـ = ٢ ب ى ، ب بَ = ٢ ب حـ

فيكون حـ ى موازيا للمستقيم بَ ع ويكون

٢ حـ ى = بَ هـ = ٢ حـ ا

وعليه يكون حـ ى = حـ ا وحينئذ تكون نقطة ى واقعة على محيط الدائرة التى مركزها حـ ونصف قطرها حـ ا

ويمكن البرهنة بمثل هذه الطريقة على أن حـ ىَ مواز للمستقيم ب ع ومساو للمستقيم حـ ا

ومن ذلك يتضح أن موقعى العمودين النازلين من بورتى قطع ناقص على اى مماس له واقعان على محيط دائرة قطرها المحور الأكبر

تعريف — الدائرة التى قطرها المحور الاكبر لقطع ناقص تسمى (الدائرة الأصلية أو المساعدة)

لنمد ىَ حـ على استقامته ليقطع الدائرة الاصلية فى نقطة أخرى كنقطة ن

فحيث ان ىَ حـ ن قطر للدائرة الاصلية فالزاوية ىَ ى ن قائمة وبما أن الزاوية ىَ ى ب قائمة أيضا فيكون ى ب ن خطا مستقيما

وحيث ان حـ ن = حـ ىَ ، حـ ب = حـ بَ ، ∠ ب حـ ن = ∠ بَ حـ ىَ

فيكون المثلثان ب حـ ن ، بَ حـ ىَ متساويين وبناء عليه بَ ىَ = ب ن

وحينئذ ب ى . بَ ىَ = ب ى . ن ب = ا ب . ب اَ = ء حـ^٢

نتيجة ١ — اذا رسم مستقيم من نقطة حـ موازيا للماس فى نقطة ع ليقطع ع ب ، ع بَ أو امتدادهما فى نقطتى س ، سَ على التناظر يكون

ع س = ع سَ = ا حـ

وذلك لأن حـ س موازللمستقيم ع ىَ والمستقيم حـ ىَ موازللمستقيم ع س .

وحينئذ ع س = حـ ىَ = حـ ا وكذلك يكون ع سَ = حـ ى = حـ ا

نتيجة ٢ ـ المستطيل المكون من العمودين النازلين من بورة قطع ناقص على مماسين له متوازيين ثابت

وعكس النظرية السابعة ذو أهمية وهو اذا كانت ب نقطة داخل محيط دائرة معلومة ووصلناها بأى نقطة مثل ح على المحيط فان المستقيم المرسوم من ح عمودا على ح ب يكون دائما مماسا لقطع ناقص احدى بورتيه نقطة ب والدائرة الاصلية له هى الدائرة المعلومة

مسائل

(١) المطلوب البرهنة على أن جزء المحور الاصغر لقطع ناقص المحصور بين المماس والعمودى فى أى نقطة على المنحنى لايمكن أن يكون أصغر من البعد بين البورتين

(٢) المطلوب البرهنة على أن ع ح يمس الدائرة ب ع م

(٣) المطلوب البرهنة على أن الدائرتين ع ب م ، ع بَ مَ متماستان

(٤) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ع ب ح١ ، م ع ح١ متشابهان وأن النسبة ب ح١ : ع ح١ ثابتة

(٥) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ح ب ع ، بَ ح١ ع متشابهان وأن ع ح . ع ح١ = ب ع . بَ ع

(٦) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ب ع ط ، ط١ ع بَ متشابهان وأن ب ع . بَ ع = ط ع . ع ط١

(٧) المطلوب رسم مماس لقطع ناقص مواز لمستقيم معلوم

(٨) المطلوب ايجاد بورتى قطع ناقص اذا علم المماس له فى نقطة معلومة وعلمت الدائرة الأصلية

(٩) المطلوب رسم قطع ناقص اذا علمت البورتان وعلم مماس واحد له

(١٠) المطلوب رسم قطع ناقص اذا علمت ثلاثة مماسات واحدى البورتين

(١١) المطلوب البرهنة على أن الدائرة التى قطرها ب ع تمس الدائرة الاصلية

(١٢) اذا رسم مماس لقطع ناقص ليقطع المماسين له فى نقطتى الراس فى ط ، ط َ فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة التى قطرها ط ط َ تمر بالبورتين

(١٣) المطلوب البرهنة على أن ى س س َ ى َ متوازى أضلاع

(١٤) المطلوب البرهنة على أن ب ى َ ، ب َ ى يتقاطعان فى منتصف ع ع

(١٥) المطلوب البرهنة على أن الدائرة ى ح ى َ تمر بموقع الاحداثى الرأسى لنقطة ع

(١٦) المطلوب البرهنة على أن ع ق منصف للزاوية ى ق ى َ

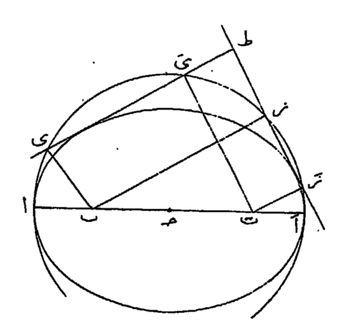
(١٧) اذا رسم من بورة قطع ناقص ب ى ، ب َ ن عمودين على المماس س َ والعمودى على المنحنى فى أى نقطة منه فالمطلوب البرهنة على أن ى ن يمر بمركز القطع الناقص

(١٨) اذا فرض قطع ناقص ذو اختلاف مركزى معلوم ويمس مستقيما معلوما فالمطلوب البرهنة على أن مركزه واقع على محيط دائرة ثابتة

(١٩) اذا فرض قطعان ناقصان لهما بورة مشتركة وكان المحور الأصغر لأحدهما يساوى المحور الأصغر للثانى فالمطلوب البرهنة على أن مماساتهما المشتركة متوازية

(٢٠) اذا رسم لقطع ناقص زوجان من المماسات المتوازية ورسمت موازيات لها من احدى البورتين فالمطلوب البرهنة على أن النقط الأربعة التى تتقاطع فيها الموازيات المرسومة من البورة مع المماسات المذكورة واقعة على محيط دائرة

٦٠ ـــ النظرية الثامنة ـــ نقطة تقاطع مماسين متعامدين لقطع ناقص واقعة على محيط دائرة ثابتة



لنفرض ط نقطة تقاطع المماسين المتعامدين ثم نرسم ب ى ، بَ ىَ عمودين على أحد المماسين ونرسم ب ن ، بَ نَ عمودين على المماس الآخر

فيكون ط ن . ط نَ = ب ى . بَ ىَ = د حـ

وحيث ان ن ، نَ واقعتان على محيط الدائرة الأصليـــة فيكون مربع المماس للدائرة الأصلية من نقطة ط مساويا الى د حـ²

وحينئذ يكون حـ ط² ـــ حـ ا² = حـ د

وبناء عليـــه فنقطة ط واقعـــة على محيط الدائرة التى مربع نصف قطرها مساو الى ا حـ² + د حـ²

تعريف ـــ الدائرة التى هى المحل الهنـــدسى لنقطة تقاطع المماسـات المتعامدة لقطع ناقص تسمى (دائرة الاستدلال)

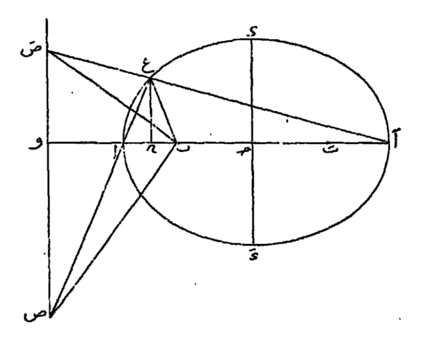
(مسألة ١) لا يمكن أن دائرة الاستدلال لقطع ناقص تقطع الدليل فى نقط حقيقية

(مسألة ٢) طول المماس لدائرة الاستدلال لقطع ناقص المرسوم من نقطة على الدليل يساوى بعد هذه النقطة عن البورة

(مسألة ٣) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز قطع ناقص معلوم طول كل من محوريه ويمس مستقيمين متعامدين ثابتين

٦١ — النظرية التاسعة — إذا رسم ع ة عمودا على المحور الأكبر ا اَ لقطع ناقص من نقطة ما على المنحنى مثل نقطة ع فان النسبة

$\overline{ع ة}^{٢}$: ا ة . ة اَ تكون ثابتة



وللبرهنة على ذلك نصل ع ا ، ع اَ ونمدهما على استقامتهما ليقطعا أحد الدليلين فى نقطتى ص ، صَ على التناظر ثم نصل ص ، صَ بالبورة ب المناظرة لهذا الدليل

فيكون صـ ب منصفا للزاوية ع ب ا َ ، صـَ ب منصفا للزاوية ع ب ا [بند ١٠] وحينئذ يكون صـ ب ، صـَ ب متعامدين وبناء عليه يحدث

صـَ و . و صـ = وب ٢

وينتج من تشابه المثلثات أن

ع ى : ى اَ = صـَ و : و اَ

وكذلك ع ى : ا ى = و صـ : و ا

∴ ع ى ٢ : ا ى . ى اَ = صـَ و . صـ و : و اَ . و ا

= وب ٢ : و ا . و اَ

ومن ذلك يتضح ان النسبة ع ى ٢ : ا ى . ى اَ تكون ثابتة مهما اختلف وضع نقطة ع واذا فرضت نقطة ع فى احدى نهايتى المحور الأصغر يصير ع ى هو الخط ء ح ويصير ا ى . ى اَ هو ا ح ٢ أى أن النسبة الثابتة يلزم أن تكون مساوية للنسبة ء ح ٢ : ا ح ٢

وحينئذ يكون ع ى ٢ : ا ى . ى ا = ء ح ٢ : ا ح ٢

نتيجة — اذا فرض أن ع ى١ عمود على المحور الأصغر من نقطة ع يكون ى ع = ح ى١ ويكون ع ى١ = ى ح

ويكون أيضا ا ى . ى ا = ح ا ٢ — ح ى ٢ = ح ا ٢ — ع ى١ ٢

وبناء عليه يكون ح ى١ ٢ : ح ا ٢ — ع ى١ ٢ = ء ح ٢ : ح ا ٢

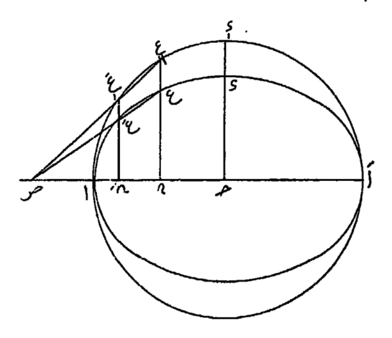
أو ح ى١ ٢ : ء ح ٢ = ح ا ٢ — ع ى١ ٢ : ح ا ٢

∴ ء ح ٢ — ح ى١ ٢ : ء ح ٢ = ع ى١ ٢ : ح ا ٢

وبناء عليه يكون ع ى١ ٢ : ء ح ٢ — ح ى١ ٢ = ح ا ٢ : ء ح ٢

٦٢ — النظرية العاشرة — اذا فرض أن ع ق هو الاحداثي الرأسي لنقطة على منحنى قطع ناقص مثل نقطة ع ثم مد المستقيم ق ع على استقامته ليقطع الدائرة الأصلية في نقطة ع١ يكون

ع ق : ع١ ق = د حـ : حـ ا



لأنه حيث ان ع ق² : ا ق . ق ا′ = د حـ² : حـ ا²

و ع١ ق² = حـ ع١² − حـ ق² = حـ ا² − حـ ق²

= ا ق . ق ا′

فيلتج أن ع ق² : ع١ ق² = د حـ² : حـ ا²

أو ع ق : ع١ ق = د حـ : حـ ا

اذا مدّ الاحداثي الرأسي لنقطة ع من القطع الناقص على استقامته ليقطع الدائرة الأصلية في نقطة ع١ تسمى النقطتان ع ، ع١ (النقطتين المتناظرتين)

المماسات لقطع ناقص والدائرة الأصلية من نقطتين متناظرتين يتقاطعان على المحور الأكبر

للبرهنة على ذلك نفرض ع ، عَ نقطتين ايا كانا على منحنى قطع ناقص ونفرض ع١ ، ع١َ النقطتين المناظرتين لهما على محيط الدائرة الأصلية ثم نصل ع عَ فيقطع المحور الأكبر فى نقطة صـ

فيكون ن صـ : نَ صـ = ن ع : نَ عَ

= ن ع١ : نَ ع١َ

وينتج من ذلك أن صـ ع١َ ع١ خط مستقيم

ثم نتصور تحرك نَ عَ ع١َ فى جهة ن ع ع١ حتى ينطبق عليه

فينتج أن المماسين فى نقطتى ع ، ع١ يتقاطعان على المحور الأكبر

وتسمى الدائرة التى قطرها المحور الاصغر (الدائرة الأصلية الصغرى)

وليس لخواص هذه الدائرة أهمية عظيمة

واذا فرض أن العمود ع ن١ على المحور الأصغر يقطع الدائرة الأصليـة الصغرى فى نقطة ق يستنتج من نتيجة النظرية التاسعة أن

ع ن١ : ق ن١ = ا حـ ٠ ء حـ

٦٣ — اذا رسم مستقيم من نقطة ع موازيا للستقيم حـ ع١ ليقطع المحور الأكبر والمحور الأصغر فى نقطتى هـ ، صـ على التناظر يكون ع١ حـ صـ ع متوازى أضـلاع واذا يكون ع صـ = حـ ع١ = حـ ا وكذلك يكون ع هـ : ع ن = ع١ حـ : ع١ ن أو أن ع هـ : ع١ حـ = ع ن : ع١ ن = حـ ء : حـ ا وبناء عليـه يكون ع هـ = ء حـ فحينئذ تكون الخطوط ع هـ ، ع صـ ، هـ صـ كلها ذات طول ثابت

(وبالعكس) اذا رسم مستقيم هـ صـ له طول ثابت وكانت نهايتاه على مستقيمين ثابتين ومتعامدين فان أى نقطة أخرى ثابتة على الخط أو على امتداده كنقطة ع مثلا ترسم قطعا ناقصا نصف محوريه مساويان للستقيمين صـ ع ، هـ ع على التناظر وهذا هو أساس برجل القطع الناقص

مسـائل

(١) اذا فرض أن ق قَ وتر من جملة أوتار متوازية فى دائرة وفرضت نقطة ع على ق قَ بحيث يكون ق ع : ع قَ ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع هو قطع ناقص

(٢) المطلوب ايجـاد بورتى قطع ناقص اذا علمت نهايتا محوره الأكبر ونقطه على المنحنى

(٣) اذا فرض أن ى ع هو الاحداثى الرأسى لأى نقطة على منحنى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للنقطة المنصفة للمستقيم ى ع هو قطع ناقص آخر

(٤) اذا فرض أن ع عَ أى وترفى قطع ناقص مـواز لأحد المحورين وفرضت نقطة ق على الوتر ع عَ بحيث يكون ع ق : ق عَ مساويا لنسبة معلومة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ق هو قطع ناقص آخر

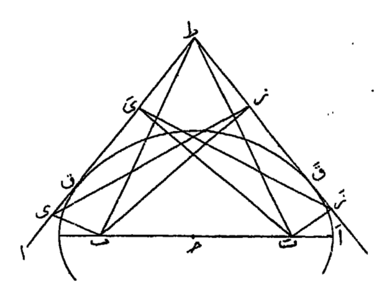
(٥) اذا فرضت ق نقطة مّا على محيط دائرة معلومة ثم رسم ق م عمودا على مماس ثابت لهذه الدائرة من نقطة ق وكانت نقطة ع منتصف الخط ق م فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع هو قطع ناقص

٦٤ ــ النظرية الحادية عشرة ــ اذا رسم ط ق ، ط قَ مماسين لقطع ناقص بورتاه ب ، بَ فالزاويتان ب ط ق ، بَ ط قَ متساويتان

وللبرهنة على ذلك ننزل من البورتين العمودين ب ح ، بَ حَ على ط ق ونرسم ب ن ، بَ نَ عمودين على ط قَ ثم نصل ح ن ، حَ نَ فتكون ∠ ح ب ن = ∠ حَ بَ نَ لأن كلا منهما مكملة للزاوية ق ط قَ

وحيث ان ب ح . بَ حَ = د ح^٢ = ب ز . بَ زَ

فيكون ب ح : ب ز = بَ زَ : بَ حَ



وحينئذ فالمثلثان ح ب ز ، زَ بَ حَ متشابهان واذا يكون

ﺪ ب ز ح = ﺪ بَ حَ زَ

ولكن النقط ب ، ح ، ط ، ز واقعة على محيط دائرة لان الزاويتين ب ح ط ، ب ز ط قائمتان

∴ الزاويتان ب ط ح ، ب ز ح اما متساويتان أو متكاملتان وكذلك الزاويتان بَ ط زَ ، بَ حَ زَ اما متساويتان أو متكاملتان

وحينئذ ﺪ ب ط ق = ﺪ بَ ط قَ اذ من الواضح أنهما لا يمكن أن يكونا متكاملتين

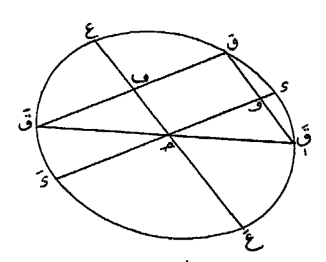
وحيث ان ﺪ ق ط ب = ﺪ قَ ط بَ فيستنتج من ذلك أن المنصف الداخلى والخارجى للزاوية ب ط بَ هما أيضا المنصفان الداخلى والخارجى للزاوية ق ط قَ

خواص الأقطار

٦٥ — قد تقدم البرهان على أن المحل الهندسى للنقط المنصفة لجملة أوتار متوازية فى قطاع مخروطى هو مستقيم مار بمركز القطع يسمى قطر المنحنى وتقدّم البرهان أيضا على أن المماسين فى نهايتى أى وتر يتقاطعان على القطر المنصف لهذا الوتر

وواضح اذا أن أى مستقيم مرسوم من مركز القطع الناقص يلزم أن يقطع المنحنى فى نقطتين حقيقيتين وتقدم البرهان فى بند ١٨ على أن المماسين فى نهايتى أى قطر يكونان موازين للأوتار التى ينصفها هذا القطر

٦٦ — النظرية الثانية عشرة — اذا كان القطر ع حـ عَ منصفا لكل أوتار القطع الناقص الموازية للقطر ء حـ ءَ فيكون القطر ء حـ ءَ منصفا لكل أوتار القطع الناقص الموازية للقطر ع حـ عَ



ليكن ق قَ وترا لقطع ناقص موازيا للقطر ء حـ ءَ فتكون نقطة ف المنصفة للوتر ق قَ واقعة على ع حـ عَ ثم نصل قَ حـ ونمده على استقامته ليقطع المنحنى فى نقطة أخرى كنقطة قَ١ ثم نصل ق قَ١ فيقطع ء حـ ءَ فى و

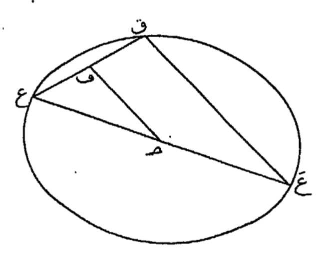
وحيث ان ف منصفة للمستقيم ن نَ ونقطة حـ منصفة للمستقيم نَ ن١َ فينتج أن ن ن١َ مواز للقطر ع حـ عَ

وحيث ان حـ ء مواز للمستقيم ن نَ ومنصف للمستقيم نَ ن١َ فيلزم أن يكون حـ ء منصفا للمستقيم ن ن١َ

فيتضح اذا أن حـ ء منصف للوتر ن ن١َ الموازى للقطر ع حـ عَ ولا بد اذا أن يكون منصفا لكل وتر مواز للقطر ع حـ عَ

تعريف — اذا كان قطران من أقطار القطاع المخروطى فى وضع مخصوص بحيث ان كلا منهما ينصف جميع الأوتار الموازية للقطر الآخر يسمى القطران (مزاوجين) لبعضهما

٦٧ — النظرية الثالثة عشرة — المستقيمان الواصلان بين أى نقطة على منحنى قطع ناقص و بين نهايتى أى قطر له يكونان موازيين للقطرين المتزاوجين



لنفرض ع حـ عَ قطرا من أقطار القطع الناقص ونفرض ن نقطة ما على المنحنى

ثم نصل ن ع ، ن عَ وننصف ن ع بنقطة ف

فحيث ان ف هى النقطة المنصفة للمستقيم ع ن ، ح النقطة المنصفة للمستقيم ع عَ فيكون ح ف موازيا للمستقيم ن عَ .

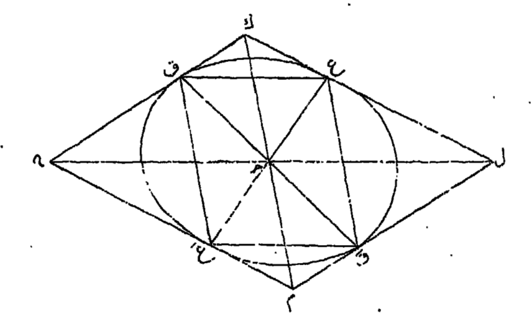
فحينئذ يكون القطر المزاوج للمستقيم ع ن موازيا للمستقيم ن عَ وهذا ماأردنا اثباته

و بالعكس اذا فرضنا ع ، ن ، عَ ثلاث نقط على منحنى قطع ناقص بحيث يكون ن ع ، ن عَ موازيين لقطرين متزاوجين يكون ع عَ قطرا للقطع الناقص

تعريف — المستقيمان الواصلان بين أى نقطة على منحنى قطع ناقص وبين نهايتى قطر يسميان (الوترين المكملين)

٦٨ — النظرية الرابعة عشرة — اذا كانت أضلاع متوازى أضلاع مماسة لمنحنى قطع ناقص تكون اقطار متوازى الأضلاع المذكور أقطارا متزاوجة فى القطع الناقص

للبرهنة على ذلك نفرض ك ل م ه متوازى أضلاع أضلاعه مماسة لقطع ناقص ولنفرض ع ، عَ نقطتى تماس لماسين متوازيين ونقطتى ن ، نَ نقطتى تماس الضلعين الأخيرين



فحيث ان المماسين للقطع الناقص فى نقطتى ع ، عَ متوازيان فيكون المستقيم ع ح عَ قطرا للقطع الناقص المذكور وكذلك يكون ن ح نَ قطرا له

وحينئذ يكون الشكل ع ن عَ نَ متوازى أضلاع واذا فالضلعان ع ن ، عَ نَ متوازيان

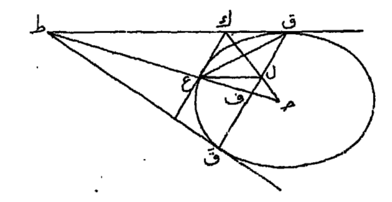
وحيث ان ح ك منصف للوتر ع ن واذا فهو منصف أيضا للوتر عَ نَ الموازى له فيكون ك ح م خطا مستقيما ومن الواضح أنه مواز للمستقيم ع نَ أو للمستقيم ن عَ

وبمثل ذلك يتضح أن ل ح م خط مستقيم وأن ح ل منصف للوتر ع نَ الموازى للمستقيم ك ح م

وحينئذ فالمستقيمان ك م ، ل ن قطران متزاوجان فى القطع الناقص (وبالعكس) اذا رسم قطران متزاوجان فى قطع ناقص وقطعهما مماس فى نقطتى ك ، ل فالمماسان الآخران للقطع الناقص فى نقطتى ك ، ل متوازيان

٦٩ — النظرية الخامسة عشرة — اذا فرض أن مماسين لقطع ناقص فى نهايتى وتر كالوتر ق قَ يتقاطعان فى نقطة ط وفرض أن القطر ح ط يقطع ق قَ فى نقطة ف ويقطع المنحنى فى نقطة ع يكون

$$\text{ح ف . ح ط} = \text{ح ع}^2$$



لأنه واضح من بند ١٨ أن المماس فى نقطة ع مواز للمستقيم ن نَ فنفرض أن هذا المماس يقطع ط ن فى نقطة ك

ثم نرسم ع ل موازيا للمستقيم ط ن فيقطع ن نَ فى نقطة ل

وحيث ان ع ك ن ل متوازى أضلاع فيكون ك ل منصفا للمستقيم ع ن

ولكن من المعلوم من بند ١٨ أن ك ح منصف للمستقيم ع ن فيستنتج أن ك ل ح خط مستقيم

وحيث ان ل ف مواز للمستقيم ك ع

فيكون ح ف : ح ع = ح ل : ح ك

وحيث ان ع ل مواز للمستقيم ط ن

فيكون ح ل : ح ك = ح ع : ح ط

وحينئذ يكون ح ف : ح ع = ح ع : ح ط

أو ح ف . ح ط = $\overline{\text{ح ع}}^2$ *

ويلاحظ أن النظرية الثالثة والنظرية الرابعة هما حالتان خاصتان لهذه النظرية العامة

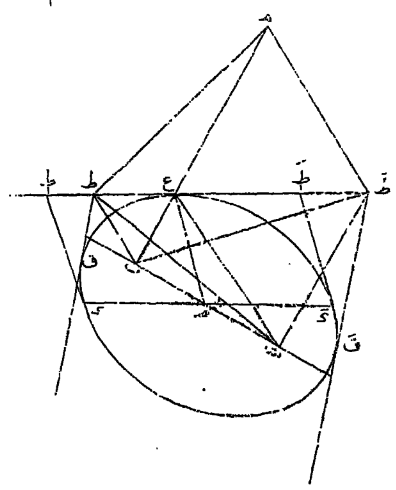
٧٠ — النظرية السادسة عشرة — اذا كان المماس فى نقطة ع لقطع ناقص بورتاه ب ، بَ يقطعه مماسان آخران متوازيان فى نقطتى ط ، طَ وكان ح ى هو نصف القطر المزاوج للمستقيم ح ع يكون

ط ع . ع طَ = ب ع . بَ ع = $\overline{\text{ح ى}}^2$

لنفرض ن ، نَ نقطتى تماس المماسين المتوازيين ثم نصل ب ط ، بَ ط ، ب طَ ، بَ طَ ونمد ب ع على استقامته لنقطة هـ بحيث يكون ع هـ = ع بَ ثم نصل هـ ط ، هـ طَ

* أول من أقام هذا البرهان الدكتور ك . تايلر

وحيث ان ط طَ منصف للزاوية هـ ع بَ والمستقيم ع هـ = ع بَ



فيكون ط هـ = ط بَ ، هـ طَ = بَ طَ ويحدث اذا أن المثلثين هـ ط طَ ، بَ ط طَ متساويان وعليه يكون

∠ هـ ط طَ = ∠ طَ ط بَ

= ∠ ب ط ق [بمقتضى النظرية الحادية عشرة]

∴ ∠ هـ ط ب = ∠ ق ط طَ

وبالمثل ∠ هـ طَ ب = ∠ قَ طَ ط

وحينئذ ∠ هـ ط ب + ∠ هـ طَ ب = ∠ ق ط طَ + ∠ قَ طَ ط

= زاويتين قائمتين لان ط ق ، طَ قَ متوازيان

فيتضح اذا أن النقط ب ، ط ، هـ ، طَ واقعة على محيط دائرة وحينئذ يكون

ط ع . ع طَ = ب ع . ع هـ = ب ع . بَ ع

ثم نفرض أن المماس فى نقطة ع يقطعه المماسان المواز يان للمستقيم حـ ع فى نقطتى ط ، ط َ

فيحدث أن ب ع . بَ ع = ط ع . ع ط َ

= حـ ءَ² لأن ط ع = ع ط َ = حـ ء

وحينئذ يكون ط ع . ع ط َ = ب ع . بَ ع = حـ ءَ²

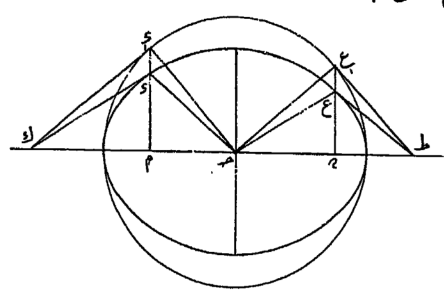
نتيجة — حيث ان أقطار متوازى الأضلاع الذى تمس أضلاعه منحنى قطع ناقص هى أقطار متزاوجة فيمكن وضع هذه النظرية فى المنطوق الآتى

اذا كان المماس لقطع ناقص فى نقطة ع يقطعه قطران متزاوجان فى نقطتى ط ، ط َ يكون ط ع . ع ط َ = ب ع . بَ ع = حـ ءَ²

ويجب ملاحظة أنه حيث ان الزاويتين ط ب ط َ ، ط هـ ط َ متكاملتان فالزاويتان ط ب ط َ ، ط بَ ط َ متكاملتان أيضا

وحينئذ لجزء أى مماس لقطع ناقص المحصور بين مماسين متوازيين أو بين قطرين متزاوجين يقابل زاويتين متكاملتين رأساهما البورتان

٧١ — النظرية السابعة عشرة — مجموع مربعى القطرين المتزاوجين فى قطع ناقص ثابت



وللبرهنة على ذلك نفرض ح ع ، ح ى نصفى قطرين متزاوجين فى قطع ناقص ثم نرسم مماسين فى نقطتى ع ، ى فيقطعان المحور الأكبر فى نقطتى ط ، ك على التناظر ثم نرسم ع ن ، ى م عمودين على المحور الأكبر فيكون ع ط موازيا للمستقيم ح ى ويكون ى ك موازيا للمستقيم ح ع ثم نمد ن ع ، م ى ليقطعا الدائرة الأصلية فى ع١ ، ى١ على التناظر

فحيث ان ح ن . ح ط = ح ا^{2} = ح ع١^{2} فيستنتج أن ع١ ط يلزم أن يكون مماسا للدائرة الأصلية فى نقطة ع١ وبالمثل يكون ك ى١ مماسا للدائرة الأصلية فى نقطة ى١ .

وحيث ان ع ط مواز للمستقيم ح ى فيكون المثلثان القائما الزاوية ط ن ع ، ح م ى متشابهين

وينتج من تشابههما أن ط ن : ح م = ن ع : م ى
= ن ع١ : م ى١

ويستنتج من ذلك أن المثلثين ط ن ع١ ، ح م ى١ متشابهان وحينئذ يكون ح ى١ موازيا للمستقيم ط ع١ ولكن ط ع١ مماس للدائرة الأصلية وعليه يكون عمودا على ح ع١

وحينئذ يكون ح ع١ ، ح ى١ متعامدين ومنه يحدث أن ح م = ن ع١ ، ح ن = م ى١

وحيث ان ح ع^{2} + ح ى^{2} = ح ن^{2} + ن ع^{2} + ح م^{2} + م ى^{2}
ولكن ح ن^{2} + ح م^{2} = ح ن^{2} + ن ع١^{2} = ح ا^{2}
و ن ع^{2} + م ى^{2} : ن ع١^{2} + م ى١^{2} = ب ح^{2} : ح ا^{2}

وبناء عليه حيث ان ن ي$_{2}^{2}$ + م ى$_{1}^{2}$ = ن ي$_{1}^{2}$ + ح ن^{2} = ح ا^{2}

فيكون ن ع^{2} + م ى^{2} = ح ب^{2}

واذا ح ع^{2} + ح ى^{2} = ح ا^{2} + ح ب^{2}

ويمكن الوصول الى هذه النتيجة بالطريقة الآتية

(ب ع + بَ ع)^{2} = ب ع^{2} + بَ ع^{2} + ٢ ب ع . بَ ع

ولكن ب ع + بَ ع = ٢ ح ا

و ب ع . بَ ع = ح ى^{2} [بمقتضى النظرية السادسة عشرة]

و ب ع^{2} + بَ ع^{2} = ٢ ح ع^{2} + ٢ ح ر^{2}

وحينئذ يكون ٤ ح ا^{2} = ٢ ح ع^{2} + ٢ ح ب^{2} + ٢ ح ى^{2}

∴ ح ع^{2} + ح ى^{2} = ٢ ح ا^{2} − ح ر^{2} = ح ا^{2} + (ح ا^{2} − ح ب^{2})

= ح ا^{2} + ح ب^{2}

مسائل

(١) المطلوب البرهنة على أن قطرى القطع الناقص الذين يكونان زاويتين متساويتين مع أحد المحورين هما متساويان

(٢) المطلوب البرهنة على أن القطرين المتساويين المتزاوجين فى قطع ناقص موازيان للمستقيمين الواصلين بين نهاية أحد المحورين وبين نهايتى المحور الآخر

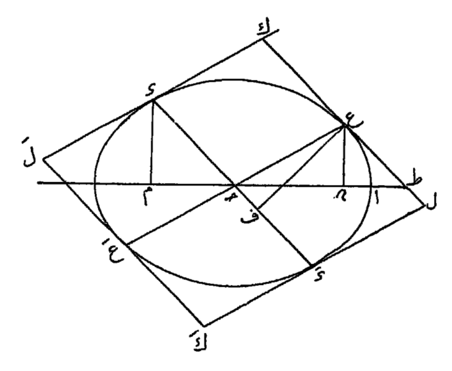
(٣) اذا رسم متوازى أضلاع فى منحنى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن قطرى متوازى الأضلاع هما قطران للقطع الناقص

(٤) اذا كان ح ع ، ح ى نصفى قطرين متزاوجين فى قطع ناقص ورسم مماسان له فى نقطتى ع ، ى وتقاطعا فى نقطة ط ورسم ح ط ليقطع المنحنى فى نقطة ر ويقطع ع ى فى نقطة ف فالمطلوب البرهنة على أن ٢ ح ف^{2} = ح ر^{2} وان ح ط^{2} = ٢ ح ر^{2} ثم ايجاد المجال الهندسية لنقطتى ف ، ط للأقطار المتزاوجة المختلفة

(٥) اذا كانت ع ، ء نقطتين على منحنى قطع ناقص ، ع١ ، ء١ نقطتين مناظرتين لهما على منحنى الدائرة الأصلية ورسم مماسان للقطع الناقص فى نقطتى ع ، ء فتقاطعا فى نقطة ط ورسم مماسان للدائرة فى نقطتى ع١ ، ء١ فتقاطعا فى نقطة ط١ فالمطلوب البرهنة على أن ط ط١ عمود على المحور الأكبر للقطع الناقص .

ثم بفرض أن الزاوية ع١ ح ء١ ثابتة المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ط هو قطع ناقص

٧٢ — النظرية الثامنة عشرة — مساحة متوازى الأضلاع المكوّن من المماسات لقطع ناقص فى نهايات قطرين متراوجين ثابتة



للبرهنة على ذلك نفرض ان المماسات للقطع الناقص فى نهايات القطرين المتراوجين ع ح عَ ، ء ح ءَ تكوّن متوازى الأضلاع ك ل كَ لَ ونفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع المحور الأكبر فى نقطة ط ثم نرسم ع ن ، ء م عمودين على المحور

فيكون متوازى الأضـــلاع ك كَ = أربعة أمثال متوازى الأضلاع ك ح = ثمـانية أمثال المثلث ى ح ع

= ٨ △ ى ح ط

= ٤ ى م . ح ط

و يمكن البرهنة كما تقدّم فى النظرية السابعة عشرة على أن

ى م : ح ۏ = ب ح : ا ح

∴ ى م . ح ط : ح ۏ . ح ط = ب ح . ا ح : ا ح

ولكن ح ۏ . ح ط = ا ح^{2}

وحينئذ يكون ى م . ح ط = ب ح . ا ح

واذا فمتوازى الأضلاع المكوّن من المماسات لقطع ناقص فى نهايات اى قطرين متزاوجين ثابت ومساو الى ٤ ا ح × ب ح

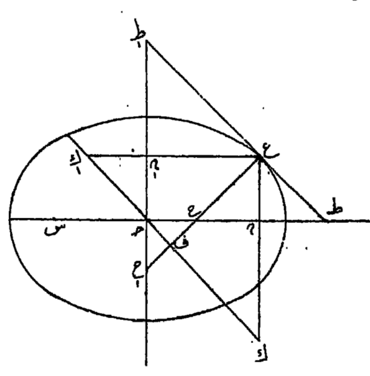
نتيجة ـــ اذا كان العمودى فى نقطة ع يقطع القطر المزاوج فى نقطة ف يكون ع ف . ح ى = ا ح . ب ح

٧٣ ـــ النظرية التاسعة عشرة ـــ اذا كان العمودى على منحنى قطع ناقص فى أى نقطة عليه كنقطة ع يقطع المحور الأكبر والمحور الأصغر فى نقطتى ج ، ج١ على التناظر ويقطع القطر المزاوج للمستقيم ح ع فى نقطة ف يكون ع ف . ع ج = ب ح^{2} ويكون ع ف . ع ج١ = ا ح^{2}

للبرهنة على ذلك نفرض ان المماس فى نقطة ع يقطع المحور الأكبر والمحور الأصغر فى نقطتى ط ، ط١ على التناظر

ثم نرسم ع ۏ ، ع ۏ١ عمودين على المحورين ونمدهما على اســتقامتهما ليقطعا القطر المزاوج فى نقطتى ك ، ك١ على التناظر

وحيث ان الزاويتين التى رأساهما ن ، ف قائمتان فيمكن رسم دائرة حول الشكل ع ف ك ن



∴ ع ف . ع ح = ع ن . ع ك

= حـ ن١ . حـ ط١ لأن ن ع = حـ ن١ ، ك ع = حـ ط١

= حـ ى

وحيث ان الزاويتين ع١ ف ك١ ، ع١ ن١ ك١ قائمتان فيمكن رسم دائرة حول الشكل ع١ ف ن١ ك١

∴ ع ف . ع ع١ = ع ن١ . ع ك١

= حـ ن . حـ ط لأن حـ ن = ن١ ع ، حـ ط = ك١ ع = حـ ا٢

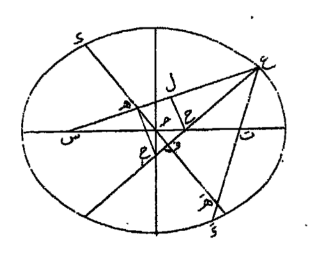
وحيث ان ع ف . حـ ى = ا حـ . ب حـ [بمقتضى النظرية الثامنة عشرة]

فينتج مما تقدّم أن ع ح : حـ ى = ب حـ : ا حـ

و . . ع ع١ : حـ ى = ا حـ : ب حـ .

و ع ح : ع ع١ = حـ ى٢

٧٤ — اذا فرض أن ب ع يقطع حـ ء فى نقطة هـ فمن المعلوم أن ع هـ = حـ ا وحينئذ يكون ع هـ^{٢} = ع ف . ع ع$_{١}$ ومن ذلك يستنتج أن الزاوية ع هـ ع$_{١}$ زاوية قائمة



وكذلك اذا كان ع ل عمودا على ب ع تكون النقط ل ، ع ، ف ، هـ واقعة على محيط دائرة وحينئذ يكون ع ل . ع هـ = ع ف . ع ع أعنى أن ع ل . ا حـ = ك حـ^{٢} أى أن ع ل يساوى نصف الوتر البورى العمودى واذا يكون مسقطا ع ع ، ع ع$_{١}$ على البعد البورى ب ع مساويين على التناظر الى نصف الوتر البورى العمودى ونصف المحور الأكبر

٧٥ — اذا علم قطران متزاوجان فى قطع ناقص يمكن ايجاد المحاور والبور وغيرها

ولاثبات ذلك نفرض أن ع حـ عَ ، ء حـ ءَ هما المحوران المتزاوجان المعلومان ونفرض أن العمودى فى نقطة ع يقطع ء حـ ءَ فى نقطة ف

ولو فرضنا ع ، ع$_{١}$ النقطتين المجهولتين اللتين هما محل تقاطع العمودى مع المحورين الأكبر والأصغر على التناظر وكانت و هى النقطة المنصفة للمستقيم ع ع$_{١}$ يكون

$$ع ف . ع ح = ب ح^٢$$

$$و \quad ع ف . ع ح_١ = ا ح^٢$$

وحينئذ يكون $ع ف (ع ح + ع ح_١) = ا ح^٢ + ب ح^٢$

ويحدث $٢ ع ف . ع و = ح ع^٢ + ح ى^٢$

ومن ذلك يمكننا ايجاد ع و

وبعد ايجاد ع و من الارتباط الآتى

$$٢ ع ف . ع و = ح ع^٢ + ح ى^٢$$

نرسم دائرة مركزها و ونصف قطرها و ح فتقطع عمودى المنحنى المرسوم من نقطة ع فى نقطتى ح ، ح١ على المحورين واذا فقد علم اتجاها المحورين وعلم طول نصفى المحورين من الارتباطين الآتيين

$$ع ف . ع ح = ب ح^٢ .$$

$$و \quad ع ف . ع ح_١ = ا ح^٢$$

وحيث علم محورا القطع الناقص فيمكن ايجاد البورتين والدليلين بسهولة

مسائل

(١) المطلوب البرهنة على أن أكبر مساحة لمتوازى أضلاع يمكن رسمه فى منحنى قطع ناقص هى مساحة متوازى الأضلاع الذى تكون أقطاره متزاوجة

(٢) المطلوب البرهنة على أن متوازى الأضلاع الذى أضلاعه مماسة لقطع ناقص لايمكن أن تكون مساحته أقل من مساحة متوازى الأضلاع المكون من المماسات فى نهايات المحورين

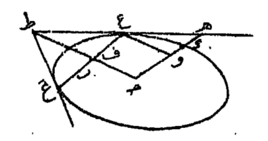
٧٦ — قد تقدم البرهان فى بند ٢٤ على أن النسبة الكائنة بين المستطيلين المكونين من أجزاء أى وترين لقطع ناقص متقاطعين وموازيين لمستقيمين

معلومين على التناظر هى ثابتة لجميع أوضاع نقطة تقاطع الوترين واذا اعتبرنا الوترين المارين بمركز القطع الناقص وموازيين لهما يستنتج أن النسبة الكائنة بين المستطيلين المكونين من أجزاء أى وترين فى قطع ناقص تساوى النسبة الكائنة بين مربعى نصفى القطرين الموازيين لهما وتستنتج الحالة الخصوصية الآتية وهى أن النسبة الكائنة بين طول المماسين لقطع ناقص فى نقطة ما تساوى النسبة الكائنة بين نصفى القطرين الموازين لهذين المماسين

٧٧ ــ النظرية العشرون ــ طول الوتر البورى لأى قطع ناقص يتغير على حسب مربع نصف القطر الموازى له

لنفرض أن ع ب عَ هو الوتر البوى وأن ء حـ ءَ هو القطر الموازى له

ونفرض أن المماسين فى نقطتى ع ، عَ يتقاطعان فى نقطة ط فيكون حـ ط منصفا للمستقيم ع عَ فى نقطة ف ويكون حـ ف ط موازيا للماس فى نقطة ء



ثم نفرض ان المماس فى نقطة ع يقطع امتداد حـ ء فى نقطة هـ

ونرسم ع و موازيا للمستقيم حـ ف فيقطع حـ ء فى نقطة و فيكون

حـ ء . حـ هـ = حـ ء^2 [بمقتضى النظرية الخامسة عشرة]

ولكن حـ و = ف ع = $\frac{1}{2}$ ع عَ

و حـ هـ = ا حـ [بمقتضى النظرية السابعة]

وحينئذ يكون ع عَ . حـ ا = ٢ حـ ء

٧٨ — النظرية الحادية والعشرين — اذا قطعت دائرة قطعا ناقصا فى أربع نقط فان المستقيم الواصل بين أى نقطتين من نقط التقاطع والمستقيم الواصل بين النقطتين الأخريين يكونان زاويتين متساويتين مع أى محور من المحورين

وللبرهنة على ذلك نفرض ك ، ل ، م ، ن نقط التقاطع الأربعة وبفرض أن ك ل م ، ن يتقاطعان فى نقطة و وحيث ان النقط الأربعة ك ، ل ، م ، ن واقعة على محيط دائرة فيكون المستطيلان ك و . و ل ، م و . ك و ن متساويين وكذلك حيث أن النقط الأربعة واقعة على منحنى القطع الناقص فيكون ك و . و ل : م و . و ن = ح عَ : ح ع^{2}

بفرض ح ع ، ح عَ نصفى القطرين الموازيين للمستقيم ك ل ، م ن على التناظر [بمقتضى بند ٧٨]

وبناء عليه يكون نصفا القطرين الموازيين للوترين متساويين ولا بد اذا أن يكونا متساويى الميل على كل من المحورين

ثانيا نفرض ان ك ل ، م ن متوازيان

وحيث أن المستقيم المنصف لوترين متوازيين فى دائرة عمود عليهما فيكون الوتران ك ل ، م ن عمودين على قطر القطع الناقص المزاوج لهما وحينئذ يلزم أن يكون الوتران متوازيين لأحد المحورين

(وبالعكس) اذا كان وتران لقطع ناقص غير متوازيين متساويى الميل على أحد المحورين تكون نهاياتها الأربعة واقعة على محيط دائرة.

مسـائل

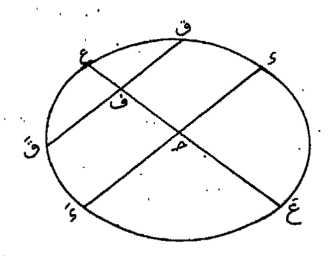
(١) اذا فرض أن و ع ، و ن مماسان لقطع ناقص نصف محوريه حـ ا ، حـ ب فالمطلوب البرهنة على أن النسبة و ع : و ن لا يمكن أن تكون أكبر من حـ ا : حـ ب

(٢) المطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة لا يمكن أن يقطع منحنى القطع الناقص فى أكثر من أربع نقط

(٣) اذا كان وترا القطع الناقص ع ن ، ع نَ متساويى الميل على أحد المحورين فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة ع ن نَ يمس منحنى القطع الناقص فى نقطة ع

٧٩ — تعريف — المستقيم ن ف المرسوم من نقطة ن الواقعة على منحنى قطع ناقص موازيا للماس المرسوم فى احدى نهايتى القطر ع ف حـ عَ يسمى (الاحداثى الرأسى للقطر ع حـ عَ)

النظرية الثانيـــة والعشرون — اذا فرض أن ن ف احداثى رأسى للقطر ع ف حـ عَ فى قطع ناقص وأن حـ ى نصف القطر المزاوج للقطر ع حـ عَ فانه يكون ن ف^{٢} : حـ ع^{٢} — حـ ف^{٢} = حـ ى^{٢} : حـ ع^{٢}



وللبرهنة على ذلك نمد ں ف على استقامته فيقطع منحنى القطع الناقص فى نقطة ںَ وحيث ان ں ںَ مواز للماس فى نقطة ع فتكون ف هى النقطة المنصفة للمستقيم ں ںَ

ومن المعلوم بمقتضى بند ٧٨ أن النسبة بين المستطيلين المكونين من أجزاء وترى قطع ناقص مرسومين فى اتجاه معلوم هى ثابتة واذا يكون

ں ف . ف ںَ : ع ف . ف عَ = ى حـ . حـ ىَ : ع حـ . حـ عَ

∴ ں ف٢ : ع ف . ف عَ = ى حـ٢ : ع حـ٢

أو ں ف٢ : حـ ع٢ — حـ ف٢ = حـ ى٢ : حـ ع٢

مسائل على القطع الناقص

(١) اذا رسم مماسان لقطع ناقص من أى نقطة على العمود المقام من البورة على المحور فالمطلوب البرهنة على أن طول الجزء من الدليل المناظر للبورة المحصور بين المماسين المذكورين ينصفه المحور

(٢) اذا أخذت قطعة من الورق على شكل نصف دائرة وفرضت نقطة ك على القطر المكوّن للقاعدة ثم طبقت الورقة بحيث تقع هـذه النقطة على أى نقطة من نقط المحيط فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الذى تحدثه كسرة الورق يمس قطعا ناقصا بورتاه ك ، حـ مع فرض أن حـ هى مركز الدائرة

(٣) اذا رسم مماسان لقطع ناقص فى نقطتى ع ، ں من نقطة على محيط الدائرة الأصلية ثم رسم قطرا القطع الناقص ع حـ عَ ، ں حـ ںَ فالمطلوب البرهنة على أن ع ںَ ، عَ ں وتران بوريان

(٤) اذا رسم من نقطـة ط المماسان ط ع ، ط ں لقطع ناقص ورسم أى مستقيم مواز للماس ط ع ليقطع ط ں فى ل ويقطع ع ں فى م ويقطع المنحنى فى ر ، رَ فالمطلوب البرهنة على أن ل م٢ = ل ر . ل رَ

(٥) اذا رسم مماس للقطع الناقص الذى بورتاه ب ، بَ فى نقطة ع فقطع المماسين له فى نقطتى الرأس فى ط ، طَ ثم وصلنا ط ب ، طَ بَ فتقاطعا فى نقطة ن فالمطلوب البرهنة على أن ن واقعة على العمودى فى نقطة ع وان الدائرة ب ع بَ هى دائرة التسع النقط للمثلث ن ط طَ

(٦) اذا رسم من البورتين ب ، بَ لقطع ناقص عمودان على ب ع ، بَ ع على التناظر فقطعا عمودى نقطة ع فى نقطتى م ، مَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن المحور الأصغر منصف للمستقيم م مَ

(٧) اذا كان ع ب ن ، عَ بَ نَ وترين بوريين متوازيين فى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المماسات للقطع الناقص فى ع ، ن ، عَ ، نَ تكون متوازى أضلاع يكون أثنان من رؤسه الأربعة واقعين على الدليل والرأسان الآخران واقعين على محيط الدائرة الاصلية

(٨) اذا فرض أن ع ، د نهايتا قطرين متزاوجين فى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمات الواصلة بين البورتين وبين النقطتين ع ، د تمس دائرة نصف قطرها مساو لنصف المحور الأصغر

(٩) اذا فرض أن ع ، عٍ نقطتان متناظرتان على منحنى قطع ناقص ومحيط دائرته الأصلية فالمطلوب البرهنة على أن بعدى البورتين ب ، بَ عن المماس للدائرة الأصلية فى نقطة عٍ يساويان المستقيمين ب ع ، بَ ع على التناظر

(١٠) اذا فرض أن أضلاع متوازى الأضلاع ا ب حـ د تمس منحنى قطع ناقص بورته ف فالمطلوب البرهنة على ان محيطات الدوائر ا ب ف ، ب حـ ف ، حـ د ف ، د ا ف كلها متساوية

(١١) اذا فرض أن وترا بوريا لقطاع مخروطى يمر بنهايات قطرين متزاوجين لقطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن طول الوتر يساوى نصف المحور الأكبر

(١٢) أذا رسم المستقيم ا ب من النقطة الثابتة ا ليقابل محيط دائرة ثابتة فى نقطة ب ثم رسم من نقطة ب المستقيم ب ح عمودا على ا ب ليقطع دائرة متحدة مع الأولى فى المركز فى نقطة ح فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المرسوم من نقطة ح موازيا للمستقيم ا ب يمس قطاعا مخروطيا ثابتا

(١٣) اذا رسم مستقيم من بورة قطع ناقص ليقطع المماسين فى نقطتى الرأس فى ط ، ط َ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة التى قطرها ط طَ يمس القطع الناقص فى نهايتى وتر مواز للمحور الأكبر

(١٤) اذا فرض أن قطعين ناقصين لهما دائرة أصلية واحدة وفرض أن أحدهما يمر ببورتى الآخر فالمطلوب البرهنة على أن الثانى يمر ببورتى الأول أيضا

(١٥) اذا فرض أن ا اَ هو المحور الأكبر لقطع ناقص بورتاه ب ، بَ وأن ع أى نقطة واقعة على المنحنى ثم رسم ا ر ، اَ رَ موازيين للمستقيمين ب ع ، بَ ع على التناظر فقطعا المماس للمنحنى فى نقطة ع فى ر ، رَ فالمطلوب اثبات ما يأتى

ا ر + اَ رَ = ا اَ

(١٦) اذا رسم قطع مكافئ يمر ببورتى قطع ناقص معلوم وبورته نقطة على منحنى القطع الناقص فالمطلوب البرهنة على أن دليل القطع المكافئ دائما مماس للدائرة الأصلية للقطع الناقص

١٧) اذا رسم مماسان لقطع ناقص مركزه ح فى نقطتى ع ، ى اللتين هما نهايتا قطرين متزاوجين للقطع الناقص فتقاطع المماسان فى نقطة ط وفرض أن ح ط يقطع المنحنى فى نقطة ن ثم رسم الوتران ن ر ، ن رَ موازيين للمستقيمين ح ع ، ح ى على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ر رَ مواز للتقسيم ع ى

(١٨) اذا فرض البعدان ح ا ، ح ب على مستقيمين معلومين بحيث يكون مجموع المربعين المرسومين على ح ا ، ح ب مساويا لمربع معلوم ثم كمل رسم متوازى الأضلاع ا ح ب ع فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع هو قطع ناقص

(١٩) اذا رسم ح ى عمودا من مركز قطع ناقص على المماس له فى أى نقطة على المنحنى كنقطة ع ورسم مماس آخر من نقطة ى وكانت ن هى نقطة تماس المماس الآخر المرسوم من نقطة ى فالمطلوب البرهنة على أن العمودى على المنحنى فى نقطة ع يمر بالنهاية الثانية للقطر المرسوم من نقطة ن

(٢٠) اذا رسم العمودان ب ى ، بَ ىَ على المماسين ط ى ، ط ىَ لقطع ناقص من البورتين ب ، بَ فالمطلوب البرهنة على أن الزاويتين ب ط ى ، بَ ط ىَ مساويتان أو متممتان لزاويتى قاعدة المثلث ح ى ىَ

(٢١) اذا كان الاحداثى الرأسى لنقطة ع الواقعة على منحنى قطع ناقص يقطع الدائرة الاصلية فى نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن قطر الدائرة المرسوم من نقطة ع۱ والعمودى على منحنى القطع الناقص فى نقطة ع يتقاطعان على محيط دائرة ثابتة

(٢٢) اذا كانت ع نقطة ما على منحنى قطع ناقص ثم وصلت بالنقطتين ا ، اَ وهما نهايتا المحور الأكبر ثم رسم ا ف عمودا على المستقيم اَ ع وفرض أن المستقيمين ا ع ، ا ف يقطعان فى ك ، ل المماس فى نقطة اَ فالمطلوب البرهنة على أن اَ ك : اَ ل = ب ح۲ : ا ح۲

(٢٣) اذا أنزل من أى نقطة على منحنى قطع ناقص مثل نقطة ع عمود على القطر ح ع فقطع الدائرة الأصلية فى ر ، رَ فالمطلوب البرهنة على أن ر رَ يساوى الفرق بين البعدين البوريين لاحدى نهايتى القطر المزاوج للقطر ح ع

(٢٤) من نقطة ع الواقعة على منحنى قطع ناقص رسم المستقيم ع ء هـ ليقطع المحورين بحيث يكون الجزآن ع ء ، ع هـ مساويين لنصفى المحورين على التناظر ثم رسم عمود على المحورين من نقطتى هـ ، ء فتقاطعا فى نقطة و فالمطلوب البرهنة على أن ع و عمود على المنحنى

(٢٥) اذا كانت ع أى نقطة على منحنى قطع ناقص مركزه حـ وبورتاه ب ، بَ وفرض أن القطر المزاوج للقطر حـ ع يقطع ب ع فى نقطة هـ فالمطلوب البرهنة على أن الفرق بين المربعين المرسومين على حـ ع ، ب هـ ثابت

(٢٦) اذا فرض أن قطعا ناقصا معلوم نصفا محوريه يمس ثلاثة أضلاع من أضلاع مستطيل معلوم فالمطلوب ايجاد مركزه وبورته

(٢٧) اذا كان وتر من أوتار قطع ناقص موازيا لاحد القطرين المتزاوجين المتساويين فالمطلوب البرهنة على أن العمودين على المنحنى فى نهايتى هذا الوتر يتقاطعان على القطر العمودى على القطر الثانى المزاوج والمساوى للأول

(٢٨) اذا فرض أن حـ ع ، حـ ء نصفا قطرين متزاوجين فى قطع ناقص وأن العمودين عليه فى ع ، ء يتقاطعان فى نقطة و فالمطلوب البرهنة على أن حـ و عمود على ع ء

(٢٩) اذا رسم عمودان على منحنى قطع ناقص فى نقطتى ع ، عَ اللتين هما نهايتا وتر بورى فقطعا المحور الأكبر فى نقطتى حـ ، حـَ على التناظر وتقاطعا فى نقطة و فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم المرسوم من و موازيا للمستقيم ع عَ منصف للمستقيم حـ حـَ

(٣٠) اذا فرض أن قطعين ناقصين فى مستو واحد لهما بورة مشتركة وكان أحد القطعين ثابتا والثانى يدور حول البورة المشتركة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة تقاطع المماسات المشتركة لهما هو محيط دائرة

(٣١) اذا علمت البورة ب لقطع ناقص وعلم أيضا طول المحور الأكبر ونقطة ص على المنحنى كنقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن القطع الناقص يمس دائما قطعا ناقصا آخر ثابتا بورتاه ب ، ع

(٣٢) اذا علمت بورة قطع ناقص وعلم طول المحور الأكبر وعلم ان البورة الثانية واقعة على مستقيم ثابت فالمطلوب البرهنة على أن القطع الناقص يمس قطعين مكافئين ثابتين بورتهما البورة المعلومة

(٣٣) اذا علم مركز قطع ناقص ونصف قطر دائرة الاستدلال ونقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن القطع الناقص يمس دائما قطعا ناقصا ثابتا متحدا مع القطع الناقص الاول فى المركز

(٣٤) اذا فرض أن قطعين ناقصين معلومين متحدين فى المركز وواقعين فى مستو واحد متساويان فى المحور الأكبر فالمطلوب بيان كيفية رسم المماسات المشتركة

(٣٥) اذا كان قطران من أقطار الشكل الرباعى المرسوم حول قطع ناقص يتقاطعان فى احدى البورتين فالمطلوب البرهنة على أن هذين القطرين متعامدان وأن القطر الثالث هو الدليل المناظر للبورة

(٣٦) اذا فرض أن ع عَ وتر لقطع ناقص مواز للمحور الأكبر ورسمت دائرتان تمران باحدى البورتين ب وتمسان المنحنى فى نقطتى ع ، عَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن الدائرتين تتقاطعان فى نقطة ف التى هى نقطة تقاطع ع عَ ، ب ط مع فرض ط نقطة تقاطع المماسين فى ع ، عَ

والمطلوب البرهنة أيضا على أن المحل الهندسى لنقطة ف للاوضاع المختلفة للمستقيم ع عَ هو قطع مكافئ رأسه نقطة ب

(٣٧) اذا رسم محيط دائرة ليقطع مستقيمين متوازيين معلومين ويكوّن منهما الوترين المتساويين ا ب ، حـ ء ويمر هذا المحيط بالنقطة الثابتة س

الواقعة بين المستقيمين فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمين المتقاطعين ا ء ، ب ح يمسان دائما منحنيا ثابتا احدى بورتية نقطة ب

(٣٨) اذا فرض أن ع ، ع١ نقطتان متناظرتان على منحنى قطع ناقص ومحيط الدائرة الأصلية التى مركزها ح ثم مد ح ع على استقامته ليقطع الدائرة الاصلية فى نقطة ب١ فالمطلوب البرهنة على أن المماس للقطع الناقص فى نقطة ى المناظرة لنقطة ب١ عمود على ح ع١ وأنه يحدد من المستقيم ح ع١ طولا مساويا للمستقيم ح ع

(٣٩) اذا فرض أن قطعين ناقصين فى مستو واحد ولهما بورة مشتركة ومحوراهما الأكبران متساويان ثم تصورنا أن أحد القطعين يدور فى مستويه حول البورة المشتركة والثانى ثابت فالمطلوب البرهنة على أن الوتر المشترك فى القطعين الناقصين دائما يمس منحنيا آخر متحدا فى البور مع القطع الناقص الثابت

(٤٠) اذا فرض أن المماس لقطع ناقص فى نقطة على المنحنى مثل نقطة ع يقطع أى مماسين متوازيين فى نقطتى م ، ى فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة التى قطرها م ى يقطع العمودى على المنحنى فى نقطة ع فى نقطتين متباعدتين عن بعضهما بقدر طول القطر المزاوج للقطر ح ع وبعداهما من المركز يساويان مجموع وفرق نصفى المحورين على التناظر

(٤١) المطلوب البرهنة على أن قطر القطع الناقص الموازى لأى وتر بورى يساوى الوتر الواصل بين النقطتين الواقعتين على محيط الدائرة الاصلية المناظرتين لنهايتى الوتر البورى

(٤٢) اذا فرض أن أضلاع مستطيل تمس قطعا ناقصا فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة المارة باحدى البورتين و برأسى زاويتين متجاورتين فى المستطيل تساوى الدائرة الاصلية

(٤٣) اذا فرض أن أى مماس لقطع ناقص يقطع دائرة الاستدلال فى نقطتى ع ، ن ويقطع أحد الدليلين فى نقطة ك وكانت ب هى البورة المناظرة للدليل فالمطلوب البرهنة على أن المثلثين ك ب ع ، ب ك ن متشابهان

(٤٤) المطلوب البرهنة على أن مساحة متوازى الاضلاع المكوّن من المماسات لقطع ناقص فى نهايات قطرين من أقطاره تتغير تغيرا عكسيا بتغير مساحة متوازى الاضلاع المكوّن من توصيل نقط التماس .

(٤٥) اذا رسمت جملة أشكال متوازية الأضلاع فى قطع ناقص وكانت أضلاعها موازية للاقطار المتزاوجة المتساوية فالمطلوب البرهنة على أن مجموع مربعات أضلاع أى متوازى أضلاع منها ثابت

(٤٦) اذا رسم قطع ناقص قطره المستقيم الواصل بين بورتى قطع ناقص معلوم والقطر المزاوج له مستقيم مساو للمحور الاصغر للقطع الناقص المعلوم أيضا فالمطلوب البرهنة على أن هذا القطع الناقص يمس دائما القطع الناقص الأصلى .

(٤٧) اذا فرض أن جملة قطاعات ناقصة بورها واقعة على ضلعين متجاورين من متوازى أضلاع معلوم وتمس الضلعين الآخرين فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكزها هو خط مستقيم

(٤٨) اذا وصلنا نهاية قطر من أقطار منحنى قطاع مخروطى ذى مركز بنهايتى أحد احداثياته الرأسية فالمطلوب البرهنة على أن الوترين المرسومين بهذه الكيفية مناسبان للقطرين الموازيين لهما

(٤٩) المطلوب البرهنة على أن الأوتار العمودية فى منحنى قطاع مخروطى اذا كانت متعامدة فانها تكون مناسبة للاقطار الموازية لها

(٥٠) اذا كان ع عَ وترا عموديا فى قطع ناقص فى نقطة ع وكان ح ى هو العمودى على المماس فى تلك النقطة وفرض أن ح ن هو نصف القطر الموازى للوتر ع عَ فالمطلوب البرهنة على أن ع عَ . ح ى = ٢ ح ن^{2}

(٥١) اذا فرض أن ع ح عَ عبارة عن قطر من أقطار قطع ناقص ورسم الوتر ع ں ومد على استقامته ليقطع فى نقطة ر المماس فى نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن القطر الموازى للوتر ع ں وسط متناسب بين ع ں ، ع ر

(٥٢) اذا رسم من نقطة على منحنى قطع ناقص وتران متساويا الميل على المماس فى هذه النقطة فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين هذين الوترين تساوى النسبة بين الوترين البوريين الموازيين لهما

(٥٣) اذا فرض قطع ناقص معلوم محوره الأكبر واحدى بورتيه التى هى بورة قطع مكافئ معلوم ومماس له فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز القطع الناقص هو مستقيم عمود على محور القطع المكافئ وأن كل هذه القطاعات الناقصة تمس قطعا مكافئا آخر مشتركا مع القطع المكافئ المعلوم فى المحور والبورة

(٥٤) اذا فرض أن مماسا لقطع ناقص فى نقطة ما مثل ع يقطع الدليلين المناظرين للبورتين ب ، بَ فى نقطتى ز ، زَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ز ب ، زَ بَ يتقاطعان على الاحداثى الرأسى للنهاية الثانية للقطر المرسوم من نقطة ع

(٥٥) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين بورتى قطع ناقص يقابل زاوية رأسها فى قطب أحد الاوتار مساوية لنصف مجموع الزاويتين اللتين يقابلهما هذا المستقيم ورأساهما فى نهايتى هذا الوتر

(٥٦) اذا فرض أن الاحداثى الرأسى لقطع ناقص فى نقطة ما على المنحنى مثل نقطة ع قد مدّ على استقامته ليقطع فى نقطة ں العمود النازل من المركز على المماس للمنحنى فى نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ں هو قطع ناقص

(٥٧) اذا فرض أن ع عَ قطر قطع ناقص وفرضت نقطة ں على المنحنى بحيث يكون المماسان فى نقطتى ع ، ں متعامدين فالمطلوب البرهنة على أن ع ں ، عَ ں يصنعان زاويتين متساويتين مع المماس فى نقطة ں واذا فرضت نقطة أخرى على المنحنى كنقطة ر فالمطلوب البرهنة على أن ں ع + ں عَ أكبر من ر ع + ر عَ

(٥٨) المطلوب البرهنة على أن محيط متوازى الأضلاع المرسوم فى قطع ناقص لا يمكن أن يكون أكبر من محيط متوازى الاضلاع الذى قطراه هما محورا القطع الناقص المذكور

(٥٩) اذا فرض أن ع عَ عبارة عن أى وتر من أوتار قطع ناقص وأن ع ح ، عَ حَ هما العمودان عليه فى نقطتى ع ، عَ بفرض النقطتين ح ، حَ واقعتين على المحور الأكبر فالمطلوب البرهنة على أن مسقطى ع ح ، عَ حَ على الوتر ع عَ متساويان

(٦٠) المطلوب رسم قطع ناقص اذا علم المركز ومماس وطول المحور الأكبر ونقطة على الدليل

(٦١) اذا فرض أن وتر التماس للماسين المرسومين من نقطة و لقطع ناقص يقطع المحور الأكبر فى نقطة ط .وان العمود النازل من نقطة و على وتر التماس يقطع المحور الأكبر أيضا فى نقطة ح فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة التى قطرها ط ح تقطعها دائرة أخرى بالتعامد

(٦٢) اذا فرضت نقطة على منحنى قطع ناقص مثل نقطة ع ثم وصلت بالبورتين ومد الخطان على استقامتهما ليقطعا الدليلين المناظرين للبورتين فى نقطتى ر ، رَ فالمطلوب البرهنة على أن ر رَ والمماس للمنحنى فى النهاية الثانية للقطر المار بنقطة ع يتقاطعان على محور القطع الناقص

(٦٣) اذا فرض أن ب ى ، بَ ىَ عمودان نازلان من بورتى قطع ناقص على المماس فى نقطة مثل ع وان و ، وَ موقعا الدليلين المناظرين للبورتين ب ، بَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن و ى ، وَ ىَ يتقاطعان على المحور الاصغر وان ه ى ، ه ىَ عمودان على و ى ، وَ ىَ مع فرض ه موقع الاحداثى الرأس لنقطة ع

(٦٤) اذا فرض ان ا اَ عبارة عن المحور الاكبر لقطع ناقص وان ى ، ىَ موقعا العمودين النازلين من البورتين على المماس فى أى نقطة من نقط المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة تقاطع ا ى ، اَ ىَ هو منحنى قطع ناقص

(٦٥) اذا فرض أن أى قطرين متزاوجين فى قطع ناقص يقطعان دائرة الاستدلال فى نقطتى ر ، رَ فالمطلوب البرهنة على أن ر رَ مماس للقطع النـاقص

(٦٦) اذا فرض أن ب ى ، بَ ىَ عبارة عن عمودين نازلين من بورتى قطع ناقص على المماس فى أى نقطة على نقط المنحنى مثل نقطة ع فالمطلوب البرهنة على ان المماسين للدائرة الأصلية فى نقطتى ى ، ىَ يتقاطعان فى نقطة طَ على الاحداثى الرأسى ه ع وان المحل الهندسى لنقطة ط هو منحنى قطع ناقص

(٦٧) اذا رسم من بورتى قطع ناقص العمودان ب ى ، بَ ىَ على أى مماس له وفرض أن و ، وَ هما موقعـا الدليلين المناظرين للبورتين ثم رسم و ى ، وَ ىَ ليقطعا الدائرة الاصلية فى نقطتين أخريين ن ، نَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ن نَ ممـاس للقطع الناقص

(٦٨) المطلوب البرهنة على أن مساحة المثلث الواقعة رؤوسه الثلاثة على منحنى قطع ناقص ومساحة المثلث التى رؤوســـه الثلاثة هى النقط الثلاثة المناظرة للنقط الأولى على الدائرة الأصلية بينهما نسبة ثابتة.

(٦٩) اذا رسم مثلث فى منحنى قطع ناقص بحيث تكون مساحته أكبر مساحة ممكن رسمها فالمطلوب البرهنة على أن نقطة تقاطع الخطوط المنصفة فى المثلث تنطبق على مركز القطع الناقص

(٧٠) المطلوب ايجاد مركز قطع ناقص اذا علمت احدى البورتين وعلم الدليل المناظر للبورة المجهولة وعلم مماس للمنحنى

(٧١) اذا رسمت جملة قطاعات ناقصة لها بورة مشتركة ب ووتر بورى عمودى ل ب لَ مشترك ثم رسم مستقيم ثابت من نقطة ب ليقطع هذه المنحنيات ورسمت الاعمدة عليها فى نقط التقاطع فالمطلوب البرهنة على أن كل هذه الاعمدة تمس قطعا مكافئا بورته واقعة على الوتر ل ب لَ

(٧٢) المطلوب البرهنة على ان المحور الاصغر للقطع الناقص المرسوم داخل مثلث معلوم لايمكن أن يزيد عن قطر الدائرة المرسومة داخله

(٧٣) اذا فرض أن منحنى قطع ناقص معلوم مركزه يمس أضلاع مثلث معلوم فالمطلوب ايجاد نقط التماس

(٧٤) اذا فرض أن ع ب ى وتر بورى لقطع ناقص ، ع ع٧ ، ى ى١ وتران عمودان عليه فالمطلوب البرهنة على أن المثلثين ب ع ع١ ، ب ى ى١ متشابهان

(٧٥) المطلوب البرهنة على أن الزاوية الخارجة المكوّنة من مماسين لقطع ناقص تساوى نصف مجموع الزاويتين اللتين يقابلهما وتر التماس ورأساهما فى البورتين

(٧٦) اذا فرض أن ضعف الاحداثى الرأسى ع عَ العمود على المحور الأكبر فى قطع ناقص مركزه حـ يقطع الدائرة الاصلية فى ع١ ، ع١َ فالمطلوب البرهنة على أن الجزء من العمودى على المنحنى فى نقطة ع المحصور بين حـ ع١ ، حـ ع١َ تنصفه نقطة ع

(٧٧) اذا فرض أن العمودى على قطع ناقص فى نقطة ع يقطع المحورين فى ح ، ح١ ثم رسم ح ك عمودياً من المركز على المماس فى نقطة ع وفرض أن و ، وَ هما منتصفا المستقيمين ح ع ، ح ح١ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن و ب = و ك = و ع وأن وَ ا = وَ ك = وَ ع

(٧٨) اذا فرض أن ا نقطة ثابتة داخل دائرة معلومة و ع نقطة على محيط الدائرة ورسم ع ك بحيث يصنع مع ا ع زاوية معلومة فالمطلوب البرهنة على أن ع ك يمس قطعا ناقصا ثابتا وأن الاختلاف المركزى للقطع الناقص لاعلاقة له بمقدار الزاوية الثابتة ا ع ن

(٧٩) اذا فرض أن ع ث عَ ضعف احداثى رأسى لقطع ناقص مركزه ح وأن العمودى على المنحنى فى نقطة ع يقطع ح عَ فى ن فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن للأوضاع المختلفة للمستقيم ع ث عَ هو قطع ناقص

(٨٠) اذا كان مماسان لقطع ناقص متعامدين على بعضهما فانه يطلب البرهنة على أن المستطيل المكون من العمودين النازلين من المركز ونقطة تقاطع المماسين على وتر التماس ثابت

(٨١) اذا رسم متوازى أضلاع حول محيط دائرة معلومة وفرض أن رأسين من رؤوسه واقعان على مستقيمين ثابتين متوازيين ومتساويى البعد عن المركز فالمطلوب البرهنة على أن الرأسين الأخريين واقعتان على قطع ناقص دائرته الاصلية الصغرى هى الدائرة المعلومة

(٨٢) اذا فرضت دائرتان متحدتا المركز وكان مركزهما نقطة ح ورسم ح ن نصف قطر للدائرة الخارجة و ح ن١ نصف قطر للدائرة الداخلة وفرض أن نصفى القطرين المذكورين متساويا الميل على مستقيم ثابت فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع المنصفة لنصف القطر ن ن١ هو قطع

ناقص وأن ع ں هو العمودى على هـــذا القطع الناقص فى نقطة ع وأن ں ں١ مساو للقطر المزاوج للمستقيم ح ع

(٨٣) اذا رسم من نقطة ما على منحنى قطع ناقص مثل ع مماس للدائرة الأصلية الصغرى فقطع دائرة الاستدلال فى ں ٦ ر فالمطلوب البرهنة على أن ع ں ٦ ں ر يساويان البعدين البوريين لنقطة ع

(٨٤) اذا رسم من نقطة ط المماسان ط ع ٦ ط ں لقطع ناقص وكان المنصف للزاوية ع ط ں يمر بنقطة ثابتة على المحور الاكبر للقطع الناقص المذكور فانه يطلب البرهنة على أن ط لابد أن تكون واقعة على محيط دائرة ثابتة

(٨٥) اذا فرض أن محيط دائرة يتدحرج داخل على محيط دائرة أخرى نصف قطرها ضعف نصف القطر للدائرة المتدحرجة فانه يطلب البرهنة على أن كل نقطة من نقط الدائرة المتحركة ترسم فى سيرها قطعا ناقصا

(٨٦) اذا كانت ع نقطة ما على منحنى قطع ناقص بورتاه ب ٦ بَ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز الدائرة الداخلة للمثلث ب ع بَ هو قطع ناقص

(٨٧) المطلوب البرهنة على أن الجزء من أىّ وتر عمودى فى قطع ناقص المحصور بين الدليلين يقابل زاوية رأسها فى قطب الوتر مساوية لنصف مجموع الزاويتين اللتين يقابلهما البعد بين البورتين ورأساهما فى نهايتى الوتر

(٨٨) اذا فرض أن ط ں ٦ ط ںَ أى مماسين لقطع ناقص ورسم ط ۃ عمودا على المحور الأكبر فالمطلوب البرهنة على أن ط ۃ منصف للزاوية ں ۃ ںَ

(٨٩) اذا فرض أن المماس فى نقطة ثابتـــة مثل ع لقطع ناقص بورتاه ب ٦ بَ يقطعه مماسان آخران متوازيان فى نقطتى ط ٦ طَ ثم رسم المستقيمان ط ب ٦ طَ بَ فتقاطعا فى نقطة و والمستقيمان ط بَ ٦ طَ ب

فتقاطعا فى نقطة وَ فالمطلوب البرهنـة على أن و ٯ وَ واقعتان على محيط دائرة ثابتة مارة بالبورتين ✱

(٩٠) اذا رسمت ثلاثة قطاعات ناقصة فى مثلث حاد الزوايا وكانت كل نقطة من النقط الثلاثة التى فى منتصف الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على أضلاعه احدى بورتى أحد القطاعات الناقصة الثلاثة فالمطلوب البرهنة على أن هذه النقط الثلاثة والبور الثلاثة الاخرى تكون مسدّسا يتقاطع كل ضلعين متقابلين من أضلاعه فى رأس من رؤوس المثلث

(٩١) اذا فرض أن ع ع هو العمودى على منحنى قطع ناقص فى نقطة ع ورسم ع ل عمودا على حـ ع ورسم حـ م موازيا لأحد البعدين البوريين لنقطة ع فقطع ع ع فى نقطة م فالمطلوب البرهنـة على أن المثلثين حـ ل م ٯ م حـ ع متشابهان

(٩٢) المطلوب رسم القطع الناقص اذا علم ممـاس له وعلمت نقطة التماس ودائرة الاستدلال

(٩٣) اذا رسم الوترانـ ى ىَ ٯ ر رَ لقطع ناقص موازيين لأحد القطرين المتزاوجين المتساويين فقطعا القطر المزاوج الثانى ع حـ عَ المساوى للاول فى نقطتى ف ٯ و فى جهتين متقـابلتيـن من المركز حـ بحيث يكون ٢ و حـ . حـ ف = حـ ع٢ فالمطلوب البرهنة على أنـ الاعمدة على المنحنى فى النقط ى ٯ ىَ ٯ ر ٯ رَ تتقاطع فى نقطة واحدة على القطر العمودى على ع حـ عَ

(٩٤) اذا رسم قطع ناقص فى مثلث وكان مركزه هو مركز الدائرة المرسومة حول المثلث فالمطلوب البرهنـة على أن الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الاضلاع المقابلة لها هى أعمدة على القطع الناقص المذكور

(٩٥) اذا رسم منحنيا قطاعين مخروطيين مركز كل منهما نقطة تقـاطع أعمدة مثلث وكان أحد المنحنيين مماسا لاضلاع المثلث والثانى مارّا برؤوسه

فالمطلوب البرهنة على أن المنحنيين المذكورين متشابهان وأن المحاور المتناظرة فيهما متعامدة

(٩٦) اذا فرض أن ع ب ن ، ع هـ م وتران بوريان فى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المماس فى نقطة ع والوتر ن م يقطعان المحور الاكبر فى نقطتين على بعدين متساويين من المركز

(٩٧) اذا فرض أن ع ب ن ، ع هـ م وتران بوريان فى قطع ناقص وفرض أن المماسين فى ن ، م يتقاطعان فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن النقطة المنصفة للمستقيم ط ع واقعة على المحور الاصغر وأن المحل الهندسى لنقطة ط هو قطع ناقص

(٩٨) اذا كان المحور الأكبر لقطع ناقص عمودا على المحور الأكبر لقطع ناقص آخر وتقاطع المنحنيان فى أربع نقط فالمطلوب البرهنة على أن هذه النقط الاربعة واقعة على محيط دائرة

(٩٩) اذا كان المحوران الاكبران لقطعين ناقصين متوازيين وتقاطع المنحنيان فى أربع نقط فالمطلوب البرهنة على أن هذه النقط الأربعة واقعة على محيط دائرة الا اذا كان الاختلاف المركزى فيهما واحدا

(١٠٠) اذا فرض أن و ع ، و ن مماسان لقطع ناقص وأن ح عَ ، ح نَ نصفا القطرين الموازيين لهما فالمطلوب البرهنة على أن

و ع . و ن + ح عَ . ح نَ = و ب . و هـ

الفصل الرابع

القطع الزائد*

٨٠ — القطع الزائد هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو مشتمل على نقطة معلومة تسمى البورة ومستقيم معلوم يسمى الدليل ويكون تحركها بكيفية بحيث ان نسبة بعدها من البورة الى بعدها العمودى من الدليل تكون دائما ثابتة وأكبر من الوحدة وقد تقدم لنا البرهان فى الفصل الأول انه بناء على هذا التعريف يكون القطع الزائد متماثلا بالنسبة للعمود النازل من البورة على الدليل وتقدم البرهان أيضا على أنه اذا فرض أن المستقيم يقطع منحنى القطع الزائد فى نقطتى ا ، اَ وفرضت حـ منتصف الخط ا اَ فان القطع الزائد يكون متماثلا بالنسبة للمستقيم ء حـ ءَ المرسوم من حـ موازيا للدليل ومن ذلك يستنتج أن هناك بورة أخرى واقعة على المستقيم ب ا اَ ودليلا آخر عمودا على ا اَ

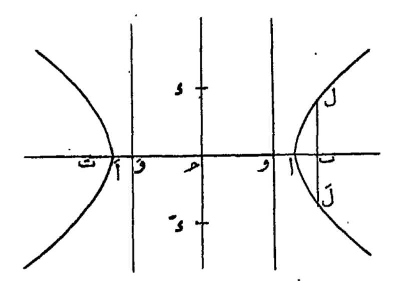
وقد تقدم البرهان ايضا فى بند ٤ أنه اذا كان ب ، بَ هما البورتان وان ب ا اَ بَ يقطع الدليلين فى نقطتى و ، وَ على التناظر يحدث أن

حـ ب : حـ ا = حـ ا : حـ و = ب ا : ا و

ويتكوّن منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين كما فى الشكل ولا شئ من أجزاء المنحنى بين المستقيمين المرسومين من الرأسين موازيين للدليلين [بند ٦]

والمستقيان ا حـ اَ ، ء حـ ءَ اللذان يكون القطع الزائد متماثلا بالنسبة لهما يسميان (المحور القاطع والمحور الغير القاطع على التناظر)

والمحور ا حـ اَ يقطع المنحنى فى نقطتين والجزء ا اَ من هذا المحور يسمى أيضا بالمحور القاطع



والمستقيم د حَ د لايقطع منحنى القطع الزائد فى نقط حقيقيـــة ولكن اذا فرضت عليه نقطتان مثل دَ ، د بحيث يكون دَ ح = ح د

و ــ د ح^٢ = ح ا^٢ ــ ح ب^٢

يحدث أن د ح^٢ = ح ب ــ ح ا^٢ = (ح ب + ح ا) (ح ب ــ ح ا) = اَ ب . ا ب

وأيضا د ح^٢ = ح ب^٢ ــ ح ا^٢ = ح ب^٢ ــ ح ب . ح و = ح ب . و ب

واذا كان ل ب لَ هو الوتر البورى العمودى فانه يحدث

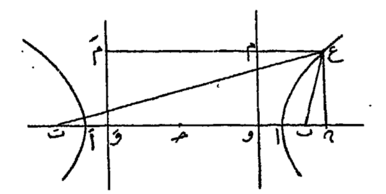
ب ل : و ب = ب ا : ا و

= ح ب : ح ا

وحينئذ يكون (ب ل . ح ا = ح ب . و ب = د ح)

١٨ النظرية الأولى ــ الفرق بين البعدين البوريين لأى نقطة على منحنى قطع زائد هو ثابت

وللبرهنة على ذلك نفرض ب ، بَ بورتى القطع الزائد ، ع نقطة ما عليه ثم نصل ب ع ، بَ ع ونرسم ع م . مَ عمودا على الدليلين فيقطعهما فى نقطتى م ، مَ



فيحدث   ب ع : م ع = ح ا : ح و

و   بَ ع : مَ ع = ح ا : ح و

∴ بَ ع − ب ع : مَ ع − م ع = ح ا : ح و

ولكن مَ ع − م ع = مَ م = وَ و = ٢ ح و

وحينئذ يكون   بَ ع − ب ع = ٢ ح ا

واذا فرض ان ع نقطة ما على الفرع المار بنقطة ا يحدث

بَ غ − ب غ = ٢ ح ا

واذا فرض ان ع نقطة ما على الفرع المار بنقطة اَ يحدث

ب غ − بَ غ = ٢ ح ا

ويمكننا أن نبرهن كما برهنا في بند ٥٥ على انه اذا فرضت نقطة ما خارجة عن منحنى القطع الزائد مثل نقطة ن أى اذا كانت نقطة ن موضوعة بحيث ان ب ن يقطعه المنحنى فى نقطة واحدة ليس الا بين ب ، ن يحدث

بَ ن ~ ب ن > ا اَ

وكذلك اذا فرضت نقطة ن داخل القطع الزائد أى اذا كانت موضوعة بحيث ان ب ن يقطعه المنحنى فى نقطتين بين ب ، ن أو لا يقطعه بالمرة فانه يحدث ما يأتى

ب ن ~ بَ ن < ا اَ

ويمكننا بواسطة الخاصة المتقدمة الذكر للقطع الزائد رسمه بحركة مستمرة وذلك أن تؤخذ مسطرة كالمسطرة ا ل فى الشكل

ثم يثبت أحد طرفيها فى نقطة ثابتــة مثــل نقطة ا بحيث تسمح بحركة الطرف الثانى ل حول النقطة الثابتــة ثم يؤخذ خيط له طول ثابت ويثبت أحد طرفيه فى طرف المسطرة ل ويثبت الطرف الثانى فى نقطة ثابتة مثــل نقطة ب ثم يشد الخيط بقلم رصاص ويحرك القلم الرصاص بحيث يكون دائمــا متكئا على حافة المسطرة ل ا



فاذا فرضـــنا ع نقطة ما من نقط أوضاع سن القلم الرصاص يكون ل ع + ع ب مساويا لطول الخيط ويكون ل ع + ع ا مساويا لطول المسطرة وحينئذ يكون ا ع — ب ع مساويا للفرق الثابت بين طول الخيط وطول المســطرة وبناء عليه يكون نقطة ع دائمــا واقعــة على منحنى قطع زائد بورتاه نقطتا ا ، ب

مســائل

(١) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علمت احدى البورتين وعلمت نهايتا المحور القاطع

(٢) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة (١) التى تمس مستقيما معلوما ودائرة معلومة (٢) التى يمر محيطها بنقطة معلومة ويمس محيط دائرة معلومة (٣) التى يمس محيطها محيط دائرتين معلومتين

(٣) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة التى تقطع دائرتين معلومتين بحيث يكون كل وتر من الاوتار المشتركة مساويا لمستقيم معلوم

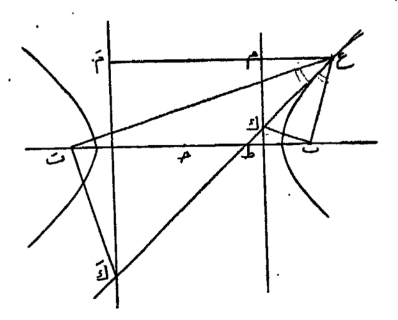
(٤) اذا فرض أن انسانا فى ميدان يسمع فى آن واحد صوت عيار نارى وصوت تصـادم المقذوف بالهدف فالمطلوب ايجاد المحل الهندسى لوضع هذا السـامع

(٥) اذا علم مركز قطع زائد وطول المحور القاطع ونقطة على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للبورتين هو منحنى قطع زائد آخر

٨٢ـــ النظرية الثانية ـــ المستقيم المماس لمنحنى قطع زائد فى أى نقطة من نقطه يصنع زاويتين متساويتين مع البعدين البوريين لنقطة التماس

لنفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الدليلين المناظرين للبورتين ب ، بَ فى نقطتى ك ، كَ على التناظر

ثم نرسم ع م مَ عمودا على الدليلين ونصل ب ع ، بَ ع ، ب ك ، بَ كَ



فيحدث من تشابه المثلثين م ع ك ، مَ ع كَ أن

ك ع : كَ ع = م ع : مَ ع

= ب ع : بَ ع

وواضح أيضا [بمقتضى بند ١٢] أن الزاويتين ك ب ع ، كَ بَ ع قائمتان

وحينئذ فالمثلثان ك ب ع ، كَ ع بَ متشابهان ويحدث من تشابههما أن

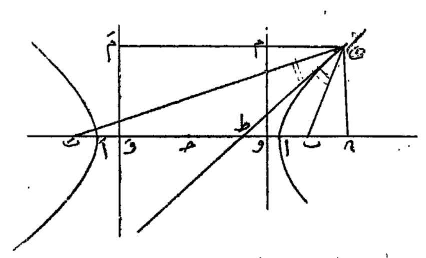
< ب ع ك = < كَ ع بَ

وحينئذ فالماس فى نقطة ع منصف للزاوية ب ع ب

وحيث ان العمودى على المنحنى عمود على الماس فينتج أن العمودى منصف للزاوية الواقعة بين ب ع وامتداد بَ ع

واذا فرض أن الماس فى نقطة ع يقطع المحور القاطع فى نقطة ط يكون ع ط منصفا للزاوية ب ع بَ واذا يكون بَ ط : ط ب = بَ ع : ع ب واذا فرض ان ع نقطة ما على الفرع المار بالراس ا يكون بَ ع أكبر من ع ب وبناء عليه يكون بَ ط أكبر من ط ب ويلزم أن تكون نقطة ط اذا واقعة بين ح ، ا

٨٣ ــ النظرية الثالثة ــ اذا كان الماس لمنحنى قطع زائد فى نقطة مّا على المنحنى يقطع المحور القاطع فى نقطة ط وكان ع ة عمودا على المحور يكون ح ة . ح ط = ح ا٢



وللبرهنة على ذلك نرسم ع م مَ عمودا على الدليلين

وحيث ان ع ط منصف للزاوية ب ع بَ فيكون

بَ ط : ط ب = بَ ع : ب ع

= مَ ع : م ع = وَ ة : و ة

وبناء عليه يحدث

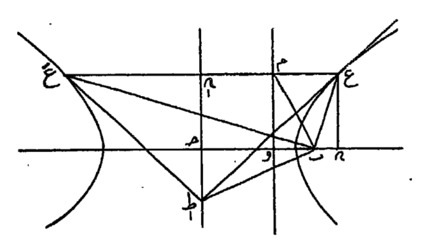
بَ ط + ط ب : بَ ط − ط ب = وَ ق + و ق : وَ ق − و ق

أى أن ٢ ح ب : ٢ ح ط = ٢ ح ق : ٢ ح و

واذا يكون ح ط . ح ق = ح ب . ح و = ح ا٢

٨٤ — النظرية الرابعة — اذا كان المماس لمنحنى قطع زائد فى نقطة ما على المنحنى مثل نقطة ع يقطع المحور الغير القاطع فى نقطة ط١ ورسم ع ق١ عمودا على هذا المحور يكون المستطيل ح ق١ . ح ط١ ثابتا

وللبرهنة على ذلك نمد ع ق١ على استقامته ليقطع المنحنى فى نقطة أخرى مثل عَ ويقطع الدليل فى نقطة م



وحيث ان كل وتر عمودى على المحور غير القاطع ينصفه هذا المحور فينتج كما تقدم فى بند ١٨ نتيجة ٢ ان المماسين فى نقطتى ع ، عَ يتقاطعان على المحور غير القاطع وحينئذ يتقاطعان فى نقطة ط١

وواضح اذا [بمقتضى بند ١٠ وبند ١٧] أن ب م ، ب ط١ هما المنصفان الداخلى والخارجى للزاوية ع ب عَ على التناظر فيكونان اذا متعامدين وبناء عليه يحدث أن

∠ ح ب ط١ = الزاوية المتممة للزاوية و ب م = ∠ و م ب

وحينئذ يكون المثلثان القائما الزاوية حـ ب ط١ ، و م ب متشابهين وينتج من تشابههما أن

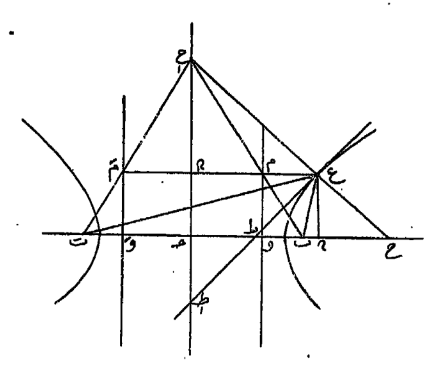
ط١ حـ : حـ ب = و ب : و م = و ب : حـ ن١

∴ ط١ حـ . حـ ن١ = حـ ب . و ب = ع حـ٢

٨٥ — النظرية الخامسة — اذا كان العمودى على منحنى قطع زائد فى نقطة مثل ع يقطع المحورين فى نقطتى ح ، ح١ تكون نسبة ع ح : ع ح١ ثابتة وكذلك اذا كان ع ن ، ع ن١ عمودين على المحور القاطع والمحور غير القاطع على التناظر تكون النسبتان حـ ح : حـ ن ، حـ ح١ : حـ ن١ ثابتتين

وللبرهنة على ذلك نصل نقطة ع بالبورتين ب ، بَ ثم نرسم من نقطة ع المستقيم ع م مَ عمودا على الدليلين ومنتهيا بهما

وحيث ان المحور غير القاطع منصف لكل من المستقيمين م مَ ، ب بَ فاذا مددنا م ب ، مَ بَ على استقامتهما فانهما يتقاطعان على المحور غير القاطع وبفرض ح١ نقطة تقاطعهما وأن ع ح١ يقطع المحور غير القاطع فى نقطة ح



يحدث ب ح : م ع = ح ع١ : ع ع١ = ح بَ : ع مَ

∴ ب ح : بَ ح = ع م : ع مَ

= ع ب : ع بَ

وحينئذ فالمستقيم ع ح ع١ منصف للزاوية الواقعة بين ب ع ، امتداد بَ ع فيلزم أن يكون هو العمودى فى نقطة ع [بمقتضى النظرية الثانية]

وينتج من تشابه المثلثين أن

ح ع : ع ع١ = ب م : م ع١ = ب و : و حـ

∴ ح ع : ع ع١ = حـ ب . و ب : حـ ب . حـ و

= حـ ى٢ : حـ أ٢

ثم حـ ح : ح ن = حـ ح : ع ن١ = ح ع١ : ع ع١

= ب ع١ : م ع١ = حـ ب : حـ و

وأيضا حـ ع١ : حـ ن١ = ح ع١ : ح ع = ب ع١ : ب م

= ب حـ : ب و

٨٦ — النظرية السادسة — محيط الدائرة المار ببورتى قطع زائد وبنقطة ما على منحنيه مثل نقطة ع يمر بنقطتى تقاطع المحور غير القاطع بالمماس والعمودى فى نقطة ع

وللبرهنة على ذلك نفرض أن محيط الدائرة ب ع بَ يقطع المحور غير القاطع فى نقطتى ط١ ، ع١ وواضح أن هاتين النقطتين فى جهتين متقابلتين من المستقيم ب بَ ثم نفرض أن ع ، ع١ فى جهة واحدة من المستقيم ب بَ

وحيث ان ط١ ع١ منصف للمستقيم ب بَ وعمود عليه فيكون قطرا للدائرة ويكون القوسان بَ ط١ ، ط١ ب متساويين وعلى ذلك تكون الزاويتان بَ ع ط١ ، ط١ ع ب متساويتين وحينئذ يكون ع ط١ هو المماس فى نقطة ع

وحيث ان ط$_{1}$ ح$_{1}$ قطر الدائرة فتكون الزاوية ط$_{1}$ ع ح$_{1}$ قائمة وحينئذ يكون ع ح$_{1}$ هو العمودى على القطع الزائد فى نقطة ع

نتيجة — حيث ان النقط ب ، بَ ، ح$_{1}$ ، ط$_{1}$ واقعة على محيط دائرة فيكون ح$_{1}$ ح . ح ط$_{1}$ = بَ ح . ح ب = ح ب^{2}

وكذلك حيث ان المثلثين ع ح ح$_{1}$ ، ط ح ط$_{1}$ متشابهان

فيحدث ح ع : ح ح$_{1}$ = ح ط$_{1}$: ح ط

وحينئذ يكون ح ع . ح ط = ح$_{1}$ ح . ح ط$_{1}$ = بَ ح . ح ب = ح ب^{2}

٨٧ — النظرية السابعة — اذا كان العمودى على منحنى قطع زائد فى نقطة مّا منه مثل نقطة ع يقطع المحور القاطع والمحور غير القاطع فى نقطتى ح ، ح$_{1}$ على التناظر ويقطع فى نقطة ف القطر الموازى للماس فى نقطة ع يكون ع ف . ع ح = ء ح^{2} ويكون ع ف . ع ح$_{1}$ = ا ح^{2}

والبرهان على ذلك هو نفس البرهان المقرر فى بند ٧٣

مسائل

(١) معلوم بورة قطع زائد وطول المحور القاطع ونقطه على المنحنى والمطلوب ايجاد المحل الهندسى للبورة الثانية والمركز

(٢) معلوم بورة قطع زائد والدليل المناظر لها ومعلوم أيضا أن مستقيما معلوما يمس المنحنى والمطلوب ايجاد البورة الثانية

(٣) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لمركز قطع زائد اذا علمت احدى بورتية ومس مستقيما معلوما فى نقطة معلومة

(٤) اذا علمت احدى بورتى قطع ناقص وعلمت نقطتان على المنحنى فالمطلوب ايجاد المحل الهندسى للبورة الثانية والمحل الهندسى للمركز

(٥) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ع ب ح١ ، م ع ح١ متشابهان وأن النسبة ع ح١ : ب ح١ ثابتة

(٦) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ب ع ح١ ، ح ع بَ متشابهان وأن

ع ح . ع ح١ = ب ع . بَ ع

(٧) المطلوب البرهنة على أن المثلثين غ ب ط ، ع ط١ بَ متشابهان وأن

ع ط . ع ط١ = ب ع . بَ ع

(٨) المطلوب البرهنة على أن الزاويتين ع ب ط١ ، ع ط ب متكاملتان

(٩) المطلوب ايجاد نقطة ع على منحنى قطع زائد بحيث تكون الدائرة ب ع بَ نهاية صغرى

(١٠) المطلوب البرهنة على أن حط . ن ع = ى ح٢ ، ط١ح . ن١ ح١ = ا ح٢

(١١) اذا فرض أن العمودى على المنحنى فى نقطة ع يقطع المحور غير القاطع فى ح١ فالمطلوب البرهنة على أن مسقط ع ح١ على أحد نصفى القطرين البوريين يساوى نصف المحور القاطع

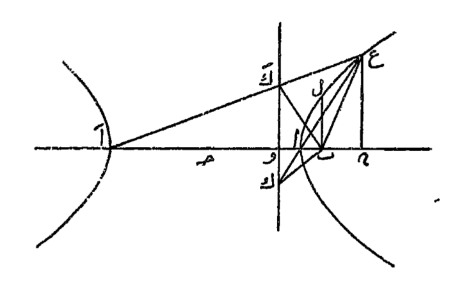
(١٢) اذا فرض أن أى مماس لقطع زائد يقطع فى نقطة ط ، ط١ المماسين من نهايتى المحور القاطع فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة التى قطرها ط طَ يمر بالبورتين

٨٨ — النظرية الثامنة — اذا كان ع ن عمودا على المحور القاطع ا اَ لقطع زائد من نقطة مّا على المنحنى مثل نقطة ع فان النسبة ع ن٢ : ا ن . اَ ن تكون ثابتة

لنفرض أن ع ا ، ع اَ يقطعان أحد الدليلين فى نقطتى ك ، كَ على التناظر ثم نصل ك ، كَ بالبورة ب المناظرة لهذا الدليل

وحيث ان المستقيم ك ب منصف للزاوية الواقعة بين ب ع وامتداد ا ب والمستقيم كَ ب منصف للزاوية اَ ب ع [بمقتضى بند ١٠] فيكون المستقيمان ك ب ، كَ ب متعامدين وبناء عليه يحدث

ك و . و كَ = و ب^{٢}



ويتتج فى تشابه المثلثين أن

ع ن : ا ن = ك و : ا و

و ع ن : اَ ن = و كَ : و اَ

∴ ع ن^{٢} : ا ن . اَ ن = ك و . و كَ : ا و . و اَ

= و ب^{٢} : ا و . و اَ

فمن الواضح اذا أن النسبة ع ن^{٢} : ا ن . اَ ن

أى ع ن^{٢} : ح ن^{٢} ــ ح ا^{٢}

تكون ثابتة لجميع أوضاع نقطة ع .

ثم نفرض ل ب نصف الوتر البورى العمودى على المحور فتكون النسبة الثابتة مساوية الى ل ب^{٢} : ح ب ــ ح ا^{٢}

وبناء عليه يحدث ع ن^٢ : ح ن^٢ ــ ح ا^٢ = ل ب^٢ : ح ب^٢ ــ ح ا

= ل د^٢ : ى ح^٢

= ى ح^٢ : ح ا^٢ [بمقتضى بند ٨٠]

وبالعكس اذا فرضت نقطة ما على امتداد المستقيم ا ا َ مثل نقطة ن ورسم ن ع عمودا على ا ا َ بحيث تكون النسبة ن ع^٢ : ا ن . ا َ ن ثابتة يكون المحل الهندسى لنقطة ع هو منحنى قطع زائد محوره القاطع هو المستقيم ا ا َ

(مسألة ١) اذا فرض أن ن نقطة خارج محيط دائرة وواقعة على القطر الثابت ا ا َ ورسم ن ع عمودا على ا ا َ ومساويا للماس للدائرة المرسوم من نقطة ن فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ع هو منحنى قطع زائد

(مسألة ٢) اذا فرض أن ع ع َ وترما لمحيط دائرة معلومة وعمود على القطر الثابت ا ا َ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة تقاطع ا ع و ا َ ع َ هو منحنى قطع زائد

٨٩ — اذا فرض أن الارتباط

ع ن^٢ : ح ن^٢ ــ ح ا^٢ = ى ح^٢ : ح ا^٢

صحيح لجميع أوضاع الاحداثى الرأسى ع ن وفرض أن ح ى$_١$ هو طول نصف القطر العمودى على ا ح ا َ فانه يكون

ح ى$_١^٢$: ــ ح ا^٢ = ى ح^٢ : ح ا^٢

ومن ذلك يستنتج أن ح ى$_١^٢$ = ــ ى ح^٢ أو ح ى$_١$ = ح ى $\sqrt{-1}$

واذا فالطول التخيلى لنصف المحور الغير القاطع يعينه الارتباط

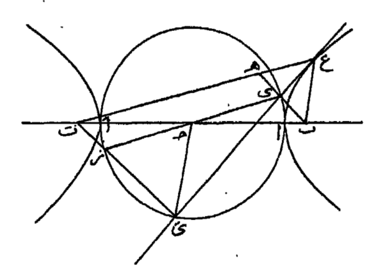
ح ى$_١^٢$ = ــ ح ى^٢ = ح ا^٢ ــ ح د^٢

ويجب أن نلاحظ أن الارتباط بين مربعى المحورين وبين البعد بين البورتين فى القطع الزائد هو نفس الارتباط الموجود فى القطع الناقص

٩٠ — النظرية التاسعة — المطاوب البرهنة على أن موقعي العمودين النازلين من بورتى قطع زائد على المماس فى نقطة مّا على المنحنى واقعان على محيط دائرة ثابتة وأن المستطيل المكون من هذين العمودين ثابت

للبرهنة على ذلك نفرض ب ى ، بَ ىَ العمودين النازلين من البورتين على المماس فى نقطة ع الواقعة على منحنى القطع الزائد

ثم نصل ب ع ، بَ ع ونمد ب ى على استقامته ليقطع بَ ع فى نقطة هـ ونصل حـ ى



وحيث ان ع ى منصف للزاوية ب ع هـ وأن ب ى هـ عمود على ع ى فيكون ب ى = ى هـ ويكون ب ع = ع هـ

وحينئذ يكون بَ هـ = بَ ع — هـ ع = بَ ع — ب ع = ٢ حـ ا

وحيث ان ب حـ = حـ بَ ، ب ى = ى هـ فيكون حـ ى موازيا للمستقيم بَ هـ ع ويكون حـ ى = $\frac{1}{2}$ بَ هـ = حـ ا

واذا فنقطة ى واقعة على محيط الدائرة التى مركزها حـ ونصف قطرها حـ ا

وبمثل هـذه الطريقة يمكن البرهنة على أن حـ ىَ مواز للمستقيم ب ع ومساو للمستقيم حـ ا

واذا فموقعا العمودين النازلين من بورتى قطع زائد على أى مماس له واقعان على محيط الدائرة التى قطرها المحور القاطع لمنحنى القطع الزائد المعروفة بالدائرة الأصلية

ثم نمد ے ح على استقامته يقطع محيط الدائرة الأصلية فى نقطة ن . وحيث ان ے ح ن قطر لهذه الدائرة فتكون الزاوية ے ےَ ن قائمة وكذلك تكون الزاوية ے ےَ بَ قائمة وحينئذ يكون بَ ن ےَ خطا مستقيما .

وحيث ان ح ے = ح ن ، ب ح = ح بَ ، ∠ ب ح ے = ∠ بَ ح ن

فيحدث أن المثلثين ب ح ے ، بَ ح ن متساويان ويكون بَ ن = ب ے

وبناء عليه يكون ے ب . بَ ےَ = بَ ن . بَ ےَ = بَ ا . بَ اَ

نتيجة ١ — اذا رسم من نقطة ح مستقيم مواز للمماس فى نقطة ع فقطع ب ع ، بَ ع أو امتدادهما فى نقطتى هـ َ١ و هـ ١ على التناظر يكون ع هـ ١ = ع هـ َ١ = ا ح

وذلك لأن ح هـ ١ مواز للمستقيم ع ے ، ح ے مواز للمستقيم بَ هـ ١ ع

وعليه يكون ع هـ = ح ے = ح ا

نتيجة ٢ — المستطيل المكون من العمودين النازلين من بورة قطع زائد على مماسين له متوازيين يكون ثابتا

وعكس النظرية التاسعة له أهمية وهو

اذا فرضنا ب نقطة خارج محيط دائرة معلومة مركزها ح ووصلنا ب بنقطة على المحيط كنقطة ے فان العمود القائم من ے على ے ب يمس القطع الزائد الذى نقطة ب بورة له والذى دائرته الأصلية هى الدائرة المعلومة ونقطة التماس لهذا المماس هى نقطة تقاطعه مع مستقيم مرسوم من البورة الثانية موازيا للمستقيم ح ے

مسائل

(١) المطلوب البرهنة على ان المحل الهندسى لمركز قطاع مخروطى معلوم بورته ويمسه مستقيمان معلومان هو خط مستقيم

(٢) معلوم احدى بورتى قطاع مخروطى وثلاثة مماسات له والمطلوب ايجاد البورة الثانية

(٣) المطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة المرسومة على المثلث المكون من ثلاثة مماسات لقطاع مخروطى لايمكن أن يمر ببورة هذا المنحنى الا اذا كان قطعا مكافئا .

(٤) اذا كان وتر دائرة معلومة يقابل زاوية قائمة رأسها فى نقطة معلومة فانه يطلب البرهنة على أن هذا الوتر يمس قطاعا مخروطيا ثابتا بورتاه النقطة المعلومة ومركز الدائرة المعلومة

٩١ — اذا كانت ے نقطة تماس أحد المماسين المرسومين من البورة ب لمحيط الدائرة الأصلية فان المستقيم المرسوم من ے عمودا على ب ے يكون بمقتضى عكس النظرية السابقة مماسا لمنحنى القطع الزائد ويكون العمود المقام من ے على ے ب مارا بمركز المنحنى وفضلا عن ذلك تكون نقطة التماس لهذا المماس هى نقطة تقاطعه مع المستقيم المرسوم من البورة الثانية موازيا للمستقيم ح ے أعنى موازيا للماس نفسه

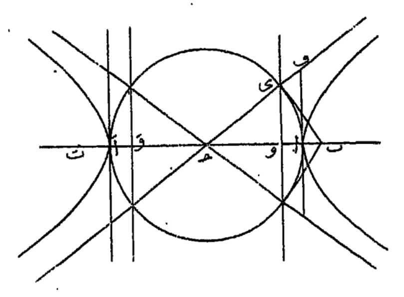
واذا فيمكن رسم مماسين للقطع الزائد يمران بالمركز ونقطتا التماس لهما تكونان على بعد لانهائى من المركز

وهذه القضية يمكن استنتاجها أيضا من بند ٨٣

تعريف — المستقيم الذى يمس منحنيا مّا فى نقطة على بعد لانهائى يسمى (الخط التقربى) للمنحنى

فاذا فرضنا و موقع الدليل المناظر للبورة ب يكون ح و : ح ى = ح ى : ح ب ومن ذلك يحدث أن المثلثين و ح ى ، ى ح ب متشابهان وتكون الزاوية ح و ى زاوية قائمة

وإذا فالخطان التقربيان لقطع زائد يمران بنقط تقاطع محيط الدائرة الاصلية مع أحد الدليلين



اذا كان المماس فى نقطـة الراس ا يقطع الخط التقربى فى نقطة ف يكون المثلثان المتشابهان ف ا ح ، ب ى ح متساويين لأن ح ى = ح ا

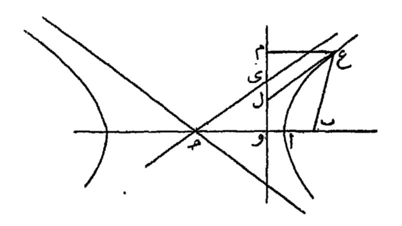
واذا يكون ح ف = ح ب ويحدث

ب ى^{2} = ا ف^{2} = ح ف^{2} — ح ا^{2} = ح ب^{2} — ح ا^{2} = ح ء

وتكون الزاوية الواقعة بين الخطين التقربيين أكبر أو اصغر من زاوية قائمة على حسب ماإذا كان ء ح أكبر أو أصغر من ح ا

ومتى كان ء ح = ح ا يكون الخطان التقربيان متعامدين ويسمى القطع الزائد فى هذه الحالة قطعا زائدا قائمـا

٩٢ — ويجب أن يلاحظ ان البعدين البوريين لنقطة ما على منحنى قطع زائد مساويان لبعدى هذه النقطة عن الدليلين مقاسين بالتوازى لأحد الخطين التقربيين



وللبرهنة على ذلك نفرض ع نقطة ما على منحنى قطع زائد ونرسم ع م عمودا على الدليل و ل م ٬ ع ل موازيا لاحد الخطين التقربيين فيكون المثلث ل ع م مشابها للمثلث ب ح و

ويحدث ل ع : ع م = ح ب : ح و = ح ا : ح و = ب ع : ع م

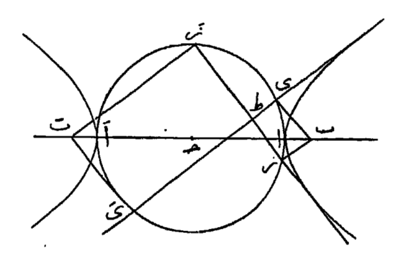
∴ ل ع = ب ع

٩٣ — النظرية العاشرة — نقطة تقاطع مماسين لقطع زائد متعامدين واقعة على محيط دائرة ثابتة

وللبرهنة على ذلك نفرض ب ٬ بَ موقعى العمودين النازلين من البورتين ب ٬ بَ على مماس ما فتكون النقطتان ب ٬ بَ واقعتين على محيط الدائرة الأصلية

وبناء عليه اذ فرض ان المماس العمودى على ب بَ يقطع ب بَ فى نقطة ط يكون هذا المماس موازيا للمستقيم ب ب أو للمستقيم بَ بَ

وحيث ان البورتين فى جهتين متقابلتين بالنسبة لأى مماس من مماسات القطع الزائد فلا بد أن تكون نقطة ط واقعة بين ى و ىَ أعنى داخل الدائرة الأصلية



فاذا رسمنا ب ن و بَ نَ عمودين من البورتين على المماس الثانى المرسوم من نقطة ط يكون ب ن = ى ط و بَ نَ = ىَ ط

و بناء عليه يكون ى ط . ط ىَ = ب ن . نَ بَ = ء حـ^2

ولكن النقطتان ى و ىَ واقعتان على محيط الدائرة الأصلية

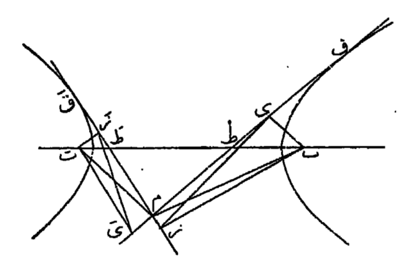
فحينئذ يكون ء حـ^2 = ى ط . ط ىَ = حـ ا^2 ـــ حـ ط

وبناء عليه تكون نقطة ط واقعة على محيط الدائرة التى مربع نصف قطرها هو حـ ا^2 ـــ حـ ء^2 وتسمى هذه الدائرة (دائرة الاستدلال)

وفى حالة ما اذا كان القطع الزائد قائما فنصف قطر دائرة الاستدلال يساوى صفرا ولا يكون للمنحنى مماسان متعامدان سوى الخطين التقربيين

وتكون دائرة الاستدلال دائرة تخيلية متى كان حـ ء^2 أكبر من حـ ا^2 اعنى متى كانت الزاوية الواقعة بين الخطين التقربيين أكبر من زاوية قائمة وفى هذه الحالة لا يوجد مماسان متعامدان

٩٤ — النظرية الحادية عشرة — المستقيمان المرسومان من نقطة ما مثل نقطة م مماسين لمنحنى قطع زائد بورتاه ب ، بَ متساويا الميل على منصفى الزاوية ب م بَ



وللبرهنة على ذلك نرسم ب ى ، بَ ىَ عمودين بوريين على م ق ونرسم ب ز ، بَ زَ عمودين بوريين على م قَ ثم نصل ى ، ز وكذلك ىَ ، زَ

وحينئذ يكون المستقيمان ب ى ، بَ ىَ متوازيين وفى جهتين متقابلتين وكذلك يكون ب ز ، بَ زَ متوازيين وفى جهتين متقابلتين

ومن ذلك يحدث أن الزاويتين ى ب ز ، ىَ بَ زَ متساويتان

ولكن ب ى . بَ ىَ = دح٢ = ب ز . بَ زَ

∴ ب ى : ب ز = بَ زَ : بَ ىَ

وحينئذ يكون المثلثان ى ب ز ، زَ بَ ىَ متشابهان وتكون

> ب ز ى = > بَ ىَ زَ

وحيث ان الزاويتين ب ى م ، ب ز م قائمتان فتكون النقط ب ، ى ، ز ، م واقعة على محيط دائرة وحينئذ فالزاويتان ب ز ى ، ب م ى إما متساويتان أو متكاملتان وكذلك الزاويتان بَ ىَ زَ ، بَ م زَ إما متساويتان أو متكاملتان

وبناء عليه فالزاويتان ب م ى ، بَ م نَ إما متساويتان أو متكاملتان

وكذلك الزاويتان ب م ن ، بَ م ىَ إما متساويتان أو متكاملتان

واذا فرضنا أن المماسين يقطعان المحور القاطع فى نقطتى ط ، طَ على التناظر تكون النقطتان ط ، طَ واقعتين بين ب ، بَ وحينئذ تكون الزاويتان ب م ط ، بَ م طَ متساويتين وبناء عليه فالمنصف الداخلى والمنصف الخارجى للزاوية ب م بَ هما أيضا المنصفان الداخلى والخارجى للزاوية ط م طَ

خواص الأقطار

٩٥ ــ تقدم البرهان على أن المحل الهندسى للنقط المنصفة لجملة أوتار قطاع مخروطى متوازية هو خط مستقيم مار بمركز المنحنى يسمى قطر المنحنى وتقدم البرهان أيضا على أن المماسين فى نهايتى وتر ما يتقاطعان على القطر المنصف لهذا الوتر وأن المماسين فى نهايتى قطر ما موازيان لجميع الاوتار التى ينصفها هذا القطر

الا أن هناك فرقا عظيما بين القطع الناقص والقطع الزائد وهو أن كل قطر من أقطار القطع الناقص لابد أن يقطع المنحنى فى نقطتين حقيقيتين وليس الأمر كذلك فى كل أقطار القطع الزائد

اذا رسم مماس لقطع زائد فى نقطة ما على المنحنى مثل نقطة ع وقطع أحد الدليلين فى نقطة ك فمن الواضح أن ع ك يقابل زاوية قائمة رأسها فى البورة المناظرة للدليل وحينئذ يلزم أن يكون ب ع أصغر من ع ك

فاذا فرض أن القطر الموازى للماس فى نقطة ع يقطع المنحنى فى نقطة ن فمن حيث انه لايوجد جزء من المنحنى بين الدليلين يكون المستقيم ح ن قاطعا للدليل فى نقطة مثل ل بين ح ، ن وكذلك حيث ان ح مركز المنحنى

فيكون ن ح قاطعا للمنحنى فى نقطة أخرى مثل نَ بحيث يكون

ن ح = ح نَ

وحيث ان ن ح مواز للماس فى نقطة ع فبمقتضى تعريف المنحنى يلزم أن نحصل على النتيجة الآتية

ب ع : ع ك = ب ن : ن ل = ب نَ : ل نَ = ب ن + ب نَ : ن ل + ل نَ

ولكن ب ع ⊿ ع ك وحينئذ ب ن + ب نَ ⊿ ن ل + ل نَ

ولكن هذا مستحيل اذ أن ل واقعة بين ن ، نَ

وبناء عليه فالقطر الموازى للماس لقطع زائد فى نقطة ما على المنحنى مثل نقطة ع لايمكن أن يقطع المنحنى فى نقط حقيقية

واذا فكل قطرين متراوجين فى قطع زائد يقطع أحدهما فقط المنحنى فى نقط حقيقية

٩٦ ــ النظرية الثانية عشرة ــ اذا كان القطر ع ح عَ لقطع زائد منصفا لجميع الأوتار الموازية للقطر ء ح ءَ يكون القطر ء ح ءَ منصفا لجميع الأوتار الموازية للقطر ع ح عَ

أنظر بند ٦٦

٩٧ ــ النظرية الثالثة عشرة ــ المستقيمان الواصلان بين أى نقطة من نقط منحنى القطع الزائد و بين نهايتى أى قطر من أقطاره موازيان للقطرين المتزاوجين

أنظر بند ٦٧

٩٨ ــ النظرية الرابعة عشرة ــ اذا كانت أضلاع متوازى أضلاع تمس منحنى قطع زائد فقطراه يكونان قطرين متراوجين فى القطع الزائد

أنظر بند ٦٨

٩٩ ـــ قيـاس الخطوط ـــ لكى نفهـم خواص القطع الزائد حق الفهم يلزمنا أن لانقتصر على معرفة أجزاء المستقيمات فقط بل يجب أن نراعى جهة قياس هذه الاجزاء

وتعين جهة أى جزء من المستقيم بترتيب وضع الحرفين الدالين على نهايتيه فمثلا اذا قيل ا ب فان هذا يدل على أن الخط مقاس من ا الى ب واذا قيل ب ا فانه يدل على أن الخط مقاس من جهة ب الى جهة ا

واذا تعددت أجزاء المستقيم الواحد فتعتبر كل الاجزاء المأخوذة فى جهة واحدة موجبة وبناء على ذلك تعتبر الاجزاء المأخوذة فى الجهة الأخرى سالبة

وليس من الضرورى أن تخصص احدى الجهتين لأن تكون هى الموجبة لعدم أهمية ذلك ومن البديهى أن ا ب + ب ا = ٠

والارتباط ا ب + ب ح = ا ح صحيح لجميع أوضاع ا ، ب ، ح على خط مستقيم

وفى الحقيقة يقصد من هذا الارتباط أن المسافة بين ا ، ب وكذلك المسافة بين ب ، ح تساويان المسافة بين ا ، ح وهذا بديهى مهما كان ب بالنسبة للنقطتين ا ، ح

ثم ان المستطيل المكون من جزئى مستقيم فى جهة واحدة يعتبر موجبا والمستطيل المكون من جزئى مستقيم فى جهتين متضادتين يعتبر سالبا واذا ا ب . ا ح + ا ب . ح ا = ٠

واذا لاحظنا هذه القواعد اتضح لنا التناظر بين خواص القطع الناقص وخواص القطع الزائد

مثال ذلك قد برهنا فى بند ٨٤ على أن $ط_{١}ح \cdot حن_{١} = ءح^{٢}$ مع فرض أن $ط_{١}ح$ ، $حن_{١}$ مرسومان فى جهة واحدة وحينئـذ يكون $حط_{١} \cdot حن_{١} = -ءح^{٢} = حء_{١}^{٢}$ [بند ٨٩] وبناء عليه ففى القطع الزائد كما فى القطع الناقص يكون $حط_{١} \cdot حن_{١}$ مساويا لمربع نصف المحور غير القاطع

١٠٠ ــ وتقدم البرهان فى بند ٢٤ على أن النسبة بين المستطيلين المكوّنين من أجزاء أى وترين لقطع زائد متقاطعين وموازيين على التناظر لمستقيمين معلومين تكون ثابتة لجميع أوضاع نقطة التقاطع . واذا كانت هذه الخطوط مارة بمركز القطع الزائد فان النسبة بين المستطيلين المكوّنين من أجزاء أى وترين للقطع الزائد تساوى النسبة بين مربعى نصفى القطرين الموازيين لهما

واذا فرض أن المستطيل المكوّن من جزئى أحد الاوتار موجب [انظر بند ٩٩] والمستطيل المكوّن من جزئى الوتر الثانى سالب كان أحد نصف القطرين الموازيين للوترين حقيقيا والآخر تخيليا ولكن اذا فرض أن كلا المستطيلين موجب أو كلاهما سالب كان كلا نصفى القطرين الموازيين للوترين حقيقيا أو كلاهما تخيليا

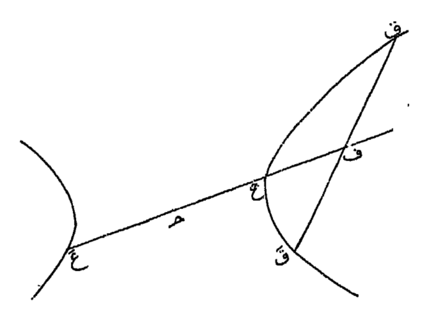
١٠١ ــ النظرية الخامسة عشرة ــ اذا كان ن ف احداثيا رأسيا للقطر ع ح عَ فى القطع الزائد تكون النسبة $نف^{٢} : حف^{٢} - حع^{٢}$ ثابتة

وللبرهنة على ذلك نمد ن ف على استقامته ليقطع منحنى القطع الزائد فى نقطة أخرى مثل نقطة نَ بحيث أن ن نَ مواز للماس فى نقطة ع فتكون نقطة ف وسط المستقيم ن نَ .

وواضح [بمقتضى بند ١٠٠] أن النسبة بين المستطيلين المكوّنين من أجزاء وترى قطع زائد مرسومين فى جهتين معلومتين ثابتة .

وحينئذ ف ى . ف ىَ : ف ع . ف عَ ثابت

أعنى أن — ى ف^٢ : حـ ف^٢ — حـ ع^٢ ثابت



واذا فرضنا أن هذه النظرية لاتزال صحيحة اذا تقاطع الوتران فى المركز وفرضنا أن حـ ءِ نصف القطر الموازى للمستقيم ى ىَ مع علمنا أن طول هذا المستقيم تخيلى يحدث مايأتى

— ى ف^٢ : حـ ف^٢ — حـ ع^٢ = حـ ء^٢ : حـ ع^٢

أو ى ف^٢ : حـ ف^٢ — حـ ع^٢ = — حـ ء^٢ : حـ ع^٢

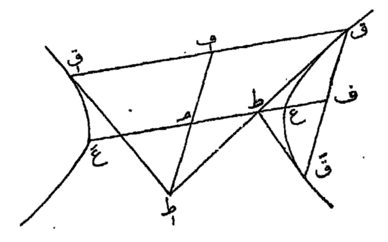
وبالعكس اذا رسمنا مستقيما مثل ى ف فى جهة ثابتة ليقطع المستقيم الثابت ع عَ فى نقطة ف بحيث تكون النسبة ى ف^٢ : ف ع . ف عَ ثابتة يكون المحل الهندسى لنقطة ى هو منحنى قطع زائد أو منحنى قطع ناقص على حسب ما اذا كانت نقطة ف خارج أو داخل المستقيم المحدود ع عَ

نتيجة — اذا فرضت نقطة كنقطة ر على الاحداثى الرأسى ى ف للقطر الثابت ع عَ فى القطع الزائد بحيث تكون النسبة ف ر : ف ى ثابتة يكون المحل الهندسى لنقطة ر هو منحنى قطع زائد آخر قطره ع عَ

١٠٢ ـــ النظرية السادسة عشرة ـــ اذا كان المماسان لمنحنى قطع زائد فى نهايتى أحد الأوتار كالوتر ق قَ ويتقاطعان فى نقطة ط وكان القطر حـ ط يقطع ق قَ فى ف و يقطع المنحنى فى ع يكون حـ ف . حـ ط = حـ ع^٢

اذا كان القطر حـ ط يقطع المنحنى فى نقط حقيقية فبرهان هـذه النظرية هو البرهان المقرر بند ٧١ بنصه

واذا كان المماسان للمنحنى فى نقطتى ق ، ق١ اللتين هما نهايتا وتر قاطع للفرعين معا يتقابلان فى نقطة ط١ يكون حـ ط١ منصفا للمستقيم ق ق١ . واذافرض أن ق قَ مواز الى حـ ب١ فان المماسين فى نقطتى ق ، قَ يتقابلان فى نقطة ط الواقعة على القطر ع حـ عَ الموازى للمستقيم ق ق١



فيكون ب١ حـ = ق ف ويحدث

حـ ط : ط ف = حـ ص١ : ق ف

∴ حـ ف . حـ ط : حـ ف . ط ف = ب١حـ . حـ ص١ : ق ف^٢

و واضح من الحالة الاولى أن حـ ف . ط ف = حـ ف^٢ ـــ حـ ف . حـ ط = حـ ف^٢ ـــ حـ ع^٢ (بمقتضى الحالة الاولى)

∴ ب ح . ح ط$_{1}$: و ف^{2} = ح ع^{2} : ح ف^{2} − ح ع^{2}

= − ح ء$_{1}^{2}$: و ف^{2} [بمقتضى النظرية الخامسة عشرة)

وحينئذ يحدث ب ح . ح ص$_{1}$ = − ح ء$_{1}^{2}$ او ح ب$_{1}$. ح ص$_{1}$ = ح ء$_{1}^{2}$

١٠٣ — النظرية السابعة عشرة — طول الوتر البورى للقطع الزائد يتغير بنسبة مربع نصف القطر الموازى له

البرهان على هـذه النظرية هو نفس البرهان المقرر ببنـد ٧٧ سواء كانت نهايتا الوتر البورى واقعتين على فرع واحد من فرعى القطع الزائد أو لا

١٠٤ — النظرية الثامنة عشرة — اذا قطع محيط دائرة منحنى قطع زائد فى أربع نقط فان المستقيم الواصل بين أى نقطتين من نقط التقاطع والمستقيم الواصل بين النقطتين الاخريين يصنعان زوايا متساوية مع محورى القطع الزائد

والبرهان المقرر فى بنـد ٧٨ ينطبق هنا تمـاما ومع ذلك فيجب ملاحظة أنه حيث ان القطرين الموازيين للوترين متساويان فيلزم أن يكونا حقيقيين معا أو تخيليين معا وعليه فان كلا الوترين اما أن يقطعا فرعى منحنى القطع الزائد أو لا يقطعه واحد منهما واذا فالنقط الاربعة التى تنشأ من تقاطع محيط الدائرة بمنحنى القطع الزائد يلزم أن تكون كلها واقعة على فرع واحد من فرعى منحنى القطع الزائد أو يكون اثنان منها على فرع واثنان على الفرع الآخر

مسـائل

(١) اذا رسم متوازى أضلاع فى منحنى قطع زائد فالمطلوب البرهنـة على أن أقطار المتوازى الاضلاع هى أقطار للقطع الزائد

(٢) المطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة لا يمكن أن يقطع منحنى القطع الزائد فى أكثر من أربع نقط

(٣) اذا كان وترا القطع الزائد ع ں ، ع ںَ متساويى الميل على المحور القاطع فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة ع ں ںَ تمس القطع الزائد

(٤) اذا فرض أن العمودى على منحنى قطع زائد فى نقطة ع يقطع المحور القاطع والمحور غير التقاطع فى ح ، ح١ على التناظر فانه يطلب البرهنة على ان مسقطى ع ح ، ع ح١ على أحد نصفى القطرين البوريين يكونان مساويين لنصف الوتر البورى العمودى ونصف المحور القاطع على التناظر

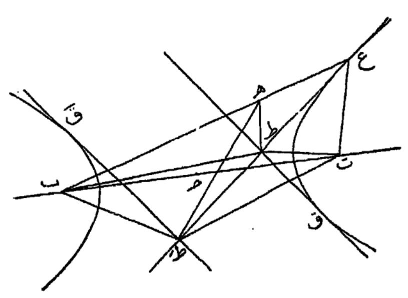
(٥) اذا كان ں ںَ أحد جملة أوتار متوازية فى قطع زائد فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة مثل ع على ں ںَ بحيث يكون ں ع : ع ںَ ثابتا هو منحنى قطع زائد آخر

(٦) اذا كان ب ى ، ب ن هما العمودان النازلان من بورة قطع زائد على مماسين متقاطعين فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن ى ن عمود على المستقيم الواصل بين ط والبورة الثانية

١٠٥ — النظرية التاسعة عشرة — اذافرض أن المماس فى نقطة ع لمنحنى قطع زائد بورتاه ب ، بَ يقطعه مماسان أيضا متوازيان فى نقطتى ط ، طَ ويقطعه خط تقربى فى نقطة ل يكون ع ط . ع طَ = ع ب . ع بَ = ع ل٢ = ع ل٢َ

وللبرهنة على ذلك نفرض ں ، ںَ نقطتى التماس للمستقيمين المماسين المتوازيين ثم نصل ب ط ، بَ ط ، ب طَ ، بَ طَ ثم نأخذ نقطة على ب ع مثل نقطة هـ بحيث يكون ع هـ = ع بَ ثم نصل هـ ط ، هـ طَ

بحيث ان ط طَ منصف للزاوية هـ ع تَ ، ع هـ = ع تَ فيكون ط هـ = ط تَ ويكون طَ هـ = طَ تَ وحينئذ فالمثلثان هـ ط طَ ، تَ ط طَ متساويان



وبناء عليه تكون ∠ هـ ط طَ = ∠ تَ ط طَ

= ∠ ب ط ن [بمقتضى النظرية الحادية عشرة]

∴ ∠ ب ط هـ = ∠ طَ ط ن

وكذلك تكون ∠ ب طَ هـ = ∠ ط طَ نً

ولكن ∠ طَ ط ن = ∠ ط طَ نَ

لان ط ن ، طَ نَ متوازيان

∴ ∠ ب ط هـ = ∠ ب طَ هـ

واذا ب ، طَ ، ط ، هـ واقعة على محيط دائرة وحينئذ يكون

ع ط . ع طَ = ع هـ . ع ب = ع ب . ع تَ

نتيجة — حيث ان قطرى المتوازى الأضلاع الذى تكون أضلاعه مماسة لمنحنى قطع زائد هما قطران متزاوجان فيمكن وضع النظرية فى المنطوق الآتى

اذا فرض أن المماس لمنحنى قطع زائد فى نقطة ع يقطعه قطران متزاوجان أيا كانا فى نقطتى ط ، طَ يكون

ع ط . ع طَ = ع ب . ع بَ

وحيث ان الخط التقربى هو فى اتجاه القطرين المتزاوجين المنطبقين فينتج أنه اذا كان المماس فى نقطة ع قاطعا للخط التقربى فى نقطة ل يحدث أن ع ب . ع بَ = ع ل٢

وواضح مما تقدم أن الجزء من أى مماس لمنحنى قطع زائد الذى يحدده مماسان متوازيان أو قطران متزاوجان يقابل زاويتين متساويتين رأساهما فى البورتين

مسائل

(١) اذا كان المماس فى نقطة ما مثل نقطة ع على منحنى قطع زائد بورتاه ب ، بَ يقطعه قطران متزاوجان أيا كانا فى نقطتى ط ، طَ على التناظر فانه يطلب البرهنة على أن المستطيل المكوّن من العمودين النازلين على ب ع من ط ، طَ ثابت

(٢) اذا فرض أن مماسا ما لمنحنى قطع زائد يقطعه المماسان المتعامدان فى نقطتى ط ، طَ فانه يطلب البرهنة على أن الدائرة المارّة بنقطتى ط ، طَ و باحدى البورتين تساوى الدائرة الاصلية

(٣) اذا فرض أن مماسا ما لمنحنى قطع زائد يقطعه مماسان متوازيان فى نقطتى ط ، طَ فانه يطلب البرهنة على أن الدائرة المارة بنقطتى ط ، طَ و باحدى البورتين لايمكن أن تكون أقل من الدائرة الأصلية

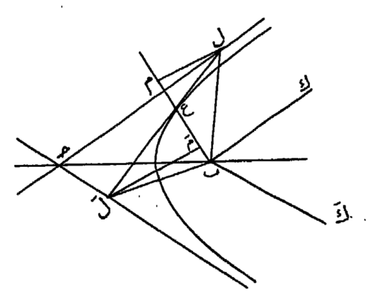
خواص الخطوط التقربية

١٠٦ — النظرية العشرون — الجزء من المماس لمنحنى قطع زائد المحصور بين الخطين التقربيين تنصفه نقطة التماس

للبرهنة على ذلك نفرض أن المماس لمنحنى القطع الزائد فى نقطة ع يقطع الخطين التقربيين فى نقطتى ل ، لَ

ثم نصل ع بالبورة ب ونرسم ب ك موازيا للخط التقربى ح ل

ثم نرسم من ل ، لَ المستقيمين ل م ، لَ مَ عمودين على ب ع فيكون الخط التقربى ح ل هو مماس نقطة تماسه على بعد لانهائى وحينئذ ب ل يصنع زاويتين متساويتين مع ع ب ، ب ك [بند ١٧]



واذا فالعمود النازل من نقطة ل على ع ب يساوى العمود النازل من ل على ب ك وبالضرورة يكون مساويا للعمود النازل من ب على ح ل المساوى للمستقيم ء ح [بمقتضى بند ٩٤]

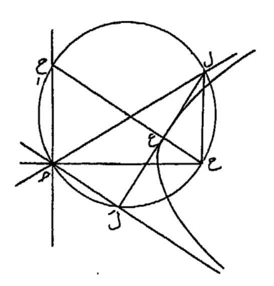
واذا ل م = ء ح

وكذلك لَ مَ = ء ح

وحيث ان العمودين ل م ، لَ مَ متساويان فيكون ل ع = ع لَ

(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة المرسومة على المثلث المكوّن من مماس ما لمنحنى قطع زائد ومن الخطين التقربيين يمر بنقط تقاطع العمودى المناظر للماس مع المحور

وللبرهنة على ذلك نفرض أن المماس يقطع الخطين التقربيين فى نقطتى ل ، لَ ونفرض أن محيط الدائرة ل م لَ يقطع المحور القاطع والمحور غير القاطع فى نقطتى ع ، ع١ على التناظر ونفرض أن ع هى نقطة تقاطع ع ع١ مع ل لَ



فيحدث أن ∠ ع ل ع + ∠ ع ع ل = ∠ ع م لَ + ∠ ع١ م ل

= ∠ ع م ل + ∠ ل م ع١

= زاوية قائمة

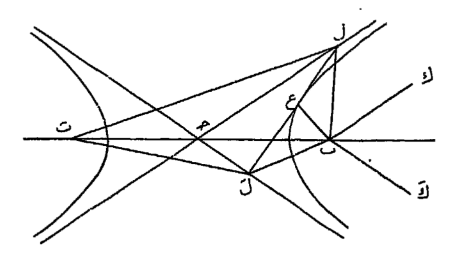
وبناء عليه يكون ع ع١ عمودا على ل لَ

وحيث ان القطر ع ع١ فى الدائرة ل م لَ عمود على الوتر ل لَ فيلزم أن يكون منصفا لهذا الوتر فى نقطة ع

ومن هنا تكون ع نقطة التماس للماس ل لَ وحينئذ يكون ع ع١ هو العمودى فى نقطة ع

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن الجزء من المماس لمنحنى قطع زائد المحصور بين الخطين التقربيين يقابل زاويتين متكاملتين رأساهما فى البورتين

للبرهنة على ذلك نفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الخطين التقربيين فى نقطتى ل ، لَ على التناظر ثم نرسم من نقطة ب المستقيمين ب ك ، ب كَ موازيين للخطين التقربيين ونصل ب ع فيكون ل ب منصفا للزاوية ع ب ك ، لَ ب منصفا للزاوية ع ب كَ



وحينئذ يحدث أن ٢ ∠ ل ب لَ = ∠ ك ب ع + ∠ ع ب كَ = ك ب̂ كَ

= ٢ ∠ ح ب ك = ٢ ∠ تَ ح ل

واذا ∠ ل ب لَ = ∠ ل ح تَ

وكذلك ∠ ل تَ لَ = ∠ ل ح ب

وبناء عليه فالزاويتان ل ب لَ ، ل تَ لَ متكاملتان واذا حيث أن ب ، تَ فى جهتين متقابلتين بالنسبة للمستقيم ل لَ فتكون النقط الأربع ب ، تَ ، ل ، لَ واقعة على محيط دائرة

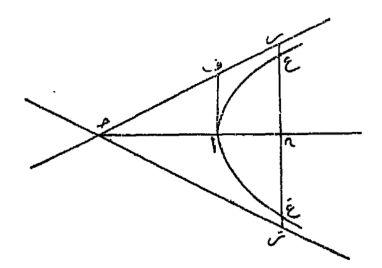
(مسألة ٣) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ل ب لَ ، ل ح تَ متشابهان

(مسألة ٤) المطلوب البرهنة على أن المثلثين ل ح ب ، ب ح لَ متشابهان وأن ل ح . ح لَ = ح ب٢

(مسألة ٥) المطلوب البرهنــة على أن ل ب ممــاس للدائرة ح ب لَ وأن لَ ب ممــاس للدائرة ح ب ل

١٠٧ — النظرية الحادية والعشرون — اذا مد ضعف الاحداثى الرأسى ع ن عَ للمحور القاطع فى منحنى قطع زائد على استقامته ليقطع الخطين التقربيين فى نقطتى م ، مَ يكون م ع . ع مَ = م ع . م عَ = ع ح٢

برهانه — لنفرض أن المماس فى نقطة الرأس ا يقطع أحد الخطين التقربيين فى نقطة ف فحينئذ [بمقتضى بند ٩٤] يكون ا ف = ع ح



وحيث ان المثلثين ح ا ف ، ح ن م متشابهان فيكون

م ن٢ : د ح٢ = ح ن٢ : ح ا٢

∴ م ن٢ — د ح٢ : د ح٢ = ح ن٢ — ح ا٢ : ح ا

= د ن٢ : د ح٢ [بمقتضى بند ٨٨]

وعليه يكون م ن٢ — د ح٢ = ع ن٢ أو م ن٢ — ع ن٢ = د ح٢

ولكن حيث ان نقطة ن هى منتصف المستقيمين م مَ ، ع عَ

فمن الواضح أن م ع = عَ مَ ، م عَ = ع مَ

وعليه يكون م ع . ع مَ = م ع . م عَ = م ن٢ — ع ن٢ = د ح

نتيجة — حيث ان المستطيل ر ع . ع رَ غير متغير ، ع رَ يزداد الى ما لا نهاية بازدياد ح ى فيستنتج أن ر ع ينقص الى ما لا نهاية بازدياد ح ى

وحينئذ يتضح أن الخط التقربى يقرب من المنحنى قربا لانهائيا ولكن لا يقطعه أبدا

١٠٨ — النظرية الثانية والعشرون — اذا قطع مستقيم منحنى قطع زائد فى النقطتين مثل ع ، عَ وقطع الخطين التقربيين فى نقطتين مثل ط ، طَ فان المستطيل ع ط . ع طَ يكون مساويا لمربع نصف القطر الموازى لهذا المستقيم ويكون ع ط مساويا الى طَ عَ

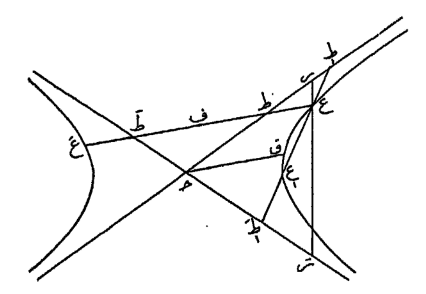
وللبرهنة على ذلك نرسم من نقطة ع عمودا على المحور القاطع فيقطع الخطين التقربيين فى ر ، رَ على التناظر

وواضح [بمقتضى النظرية الحادية والعشرين] أن المستطيل ع ر . ع رَ ثابت ومساو لمربع نصف القطر الموازى للمستقيم المذكور

ولكن اذا رسم الوتر ع ط طَ عَ فى أى اتجاه معلوم فكل من المثلثين ر ع ط ، رَ ع طَ يكون غير متغير وحينئذ يكون ع ر : ع ط ثابتا وكذلك ع ر : ع طَ ثابت لجميع أوضاع نقطة ع

وبناء عليه تكون النسبة بين المستطيل ع ط . ع طَ والمستطيل ع ر . ع رَ ثابتة ومعلوم أن المستطيل ع ر . ع رَ ثابت

واذا فالمستطيل ع ط . ع طَ ثابت لجميع أوضاع نقطة ع بفرض أن ع ط طَ مرسوم فى اتجاه معين



واذا رسمنا الوتر من نقطة ى الواقعة على منحنى القطع الزائد بحيث يكون ى ح موازيا للوتر ع ط طَ يكون

ع ط . ع طَ = ى ح

واذا قطع الوتر ع ط طَ فرعين مختلفين من منحنى القطع الزائد فان القطر الموازى له يقطع المنحنى فى نقط حقيقية

ومع ذلك اذا رسمنا من نقطة ع مستقيما يقطع فرعا واحدا من المنحنى فى نقطتين مثل ع ، ع١ على التناظر ويقطع الخطين التقربيين فى نقطتين مثل ط١ ، ط١َ على التناظر أيضا فان القطر الموازى له يقطع المنحنى فى نقط تخيلية ولكن المستطيل ع ط١ . ع ط١َ لايزال مساويا لمربع نصف القطر الموازى للخط القاطع ولكن فى هذه الحال يكون كل من المستطيل ع ط١ . ع ط١َ ومربع نصف القطر الموازى سالبا

واذا قطع الوتر ع ط طَ منحنى القطع الزائد فى نقطة أخرى مثل عَ وكانت ف منتصف المستقيم ط طَ يكون

ع ط . ع طَ = عَ ط . عَ ط

∴ ع ف٢ — ط ف٢ = عَ ف٢ — طَ ف٢

ولكن ط ف = ف طَ فحينئذ ع ف = ف عَ وبناء عليه تكون نقطة وسط ط طَ هى وسط ع عَ أيضا وحينئذ يكون ع ط = طَ عَ

وفى الحالة الخصوصية التى فيها يكون الوتر فى وضع فيه تنطبق النقطتان ع ، عَ على بعضهما فان النقطة المتوسطة للخط ط طَ تنطبق على ع أو عَ وهذا برهان آخر للنظرية العشرين

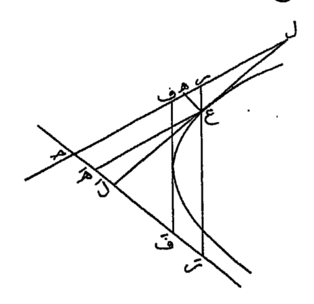
نتيجة — اذا كان المماس فى نقطة ع يقطع الخطين التقربيين فى ل ، لَ وكان ح ء هو نصف القطر الموازى للخط المذكور يكون

$$\text{ح ء}^2 = \text{ع ل . ع لَ} = - \text{ع ل}^2$$

لأن ل ع = ع لَ

١٠٩ — النظرية الثالثة والعشرون — مساحة المثلث المكون من الخطين التقربيين ومن مماس لقطع زائد ثابتة

وللبرهنة على ذلك نفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الخطين التقربيين فى نقطتى ل ، لَ ثم نرسم ع هـ ، ع هـَ موازيين للمستقيمين ح لَ ، ح ل فيقطعان ح ل ، ح لَ فى هـ ، هـَ على التناظر ثم ننزل عمودا من نقطة ع على المحور القاطع فيقطع ح ل ، ح لَ فى نقطتى ر ، رَ على التناظر



وحيث ان كلا من المثلثين هـ ع ر ، هـَ ع رَ ذو شكل ثابت
فتكون النسبتان ع هـ : ع ر ، ع هـَ : ع رَ ثابتتين وحينئذ ينتج أن
ع هـ . ع هـَ : ر ع . ع رَ ثابت

ومن المعلوم أن ر ع . ع رَ = ع حـ٢ [بمقتضى النظرية الحادية والعشرين]

وحينئذ يكون ع هـ . ع هـَ ثابتا ولكن بما أن نقطة ع هى منتصف الخط ل لَ ، ع هـَ ، ع هـ موازيان للخطين حـ ل ، حـ لَ على التناظر
فيكون حـ لَ يساوى ٢ هـ ع ، حـ ل يساوى ٢ هـ ع

واذا يكون حـ ل . حـ لَ = ٤ ع هـ . ع هـَ = مقدارا ثابتا

وحينئذ فمساحة المثلث ل حـ لَ تكون ثابتة

واذا كان المماس فى نقطة الرأس قاطعا للخطين التقربيين فى نقطتى ف ، فَ على التناظر فمن المعلوم ان حـ ف = حـ فَ = حـ ب

وعليه يكون حـ ل . حـ لَ = حـ ف . حـ فَ = حـ ب٢

وأيضا ٤ ع هـ . ع هـَ = حـ ل . حـ لَ = حـ ب٢

ويمكن البرهنة على ذلك بطريقة أخرى فنقول

حيث ان حـ هى منتصف المستقيم ب بَ فيكون

٢ Δ ل حـ لَ = Δ ل بَ لَ — Δ ل لَ ب

= ٢ Δ ل ع بَ — ٢ Δ ل ع ب

= بَ ع . ع حـ — ب ع . ع حـ [بمقتضى بند ١٠٦]

= ٢ ا حـ . ع حـ

أو بطريقة أخرى هكذا

النقط ل ، لَ ، ب ، بَ واقعة على محيط دائرة [بمقتضى بند ١٠٦ مسألة ٢]

ثم نفرض أن الدائرة ل ب ل َ بَ تقطع الخط التقربى حـ ل فى نقطة ثانية مثل $ل_١$

وحيث ان حـ هى منتصف ب بَ ، وأن حـ لَ ، حـ $ل_١$ يصنعان مع ب ب زاويتين متساويتين فضلا عن كون هذين المستقيمين فى جهة واحدة بالنسبة للمستقيم ب بَ فيكون حـ $ل_١$ = حـ لَ

وحينئذ يكون حـ ل . حـ لَ = حـ ل . حـ $ل_١$ = ب حـ . حـ بَ

مسائل

(١) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علم الخطان التقربيان وعلمت نقطة على المنحنى

(٢) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علم خط تقربى وعلمت ثلاث نقط منه

(٣) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علم خط تقربى وعلمت نقطتان على المنحنى ومماس فى أحدى النقطتين

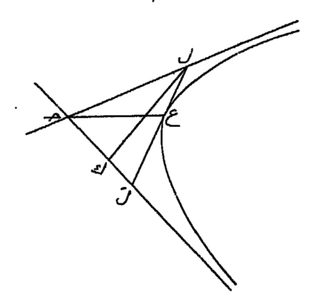
(٤) اذا تحرك مستقيم بكيفية بحيث ان المثلث المكوّن منه ومن مستقيمين ثابتين تكون مساحته ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن هذا المستقيم دائما يمس منحنى قطع زائد ثابت والمطلوب البرهنة أيضا على أن المحل الهندسى للنقطة التى تقسم بنسبة معلومة الجزء من المستقيم المتحرك الذى يحدده المستقيمان الثابتان هو منحنى قطع زائد أيضا خطاه التقربيان هما المستقيمان الثابتان

(٥) اذا فرض أن مماسين لمنحنى قطع زائد يقطعان الخطين التقربيين فى ل ، لَ وفى م ، مَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ل مَ ، لَ م موازيان لوتر تماس المماسين المذكورين وعلى بعدين متساويين منه

(٦) المطلوب رسم منحنى قطع زائد اذا علم أحد الخطين التقربيين وعلم مماسان للنحنى ونقطة تماس أحدهما

١١٠ — النظرية الرابعة والعشرون — مجموع مربعى القطرين المتزاوجين فى قطع زائد ثابت

وللبرهنة على ذلك نفرض أن المستقيم المماس لقطع زائد فى نقطة منه مثل ع يقطع الخطين التقربيين فى ل ، لَ على التناظر فمن الواضح اذن ان نقطة ع هى منتصف المستقيم ل لَ



وحينئذ يكون حل٢ + حلَ٢ = ٢ حع٢ + ٢ ع ل٢

وكذلك اذا كان ل ك عمودا على ح لَ من نقطة ل يكون

حل٢ + حلَ٢ — ٢ حلَ . حك = ل لَ٢ = ٤ ع ل٢

وحينئذ يكون حلَ . حك = حع٢ — ع ل٢

ولكن من المعلوم أن ح ل . ح لَ ثابت وأنه من حيث ان المثلث ل ح ك ثابت الشكل فيكون ح ك متغيرا بتغير ح ل وحينئذ فالمستطيل ح لَ . ح ك ثابت

وبناء عليه يكون حـ ع^٢ ــ ع ل^٢ ثابتا ولكن [بمقتضى نتيجة النظرية الثانية والعشرين] يكون ع ل^٢ = ــ حـ ء$_١^٢$

بفرض ان حـ ء$_١$ هو نصف القطر الموازى للمستقيم ل ع لَ وعليه يكون حـ ع^٢ + حـ ء$_١^٢$ ثابتا

١١١ ــ اذا علم قطران متزاوجان فى منحنى قطع زائد يمكن تعيين المحورين والبورتين وغير ذلك

لذلك نفرض أن ع حـ عَ هو القطر المعلوم الذى يقطع المنحنى فى نقطتين حقيقيتين ونفرض أن ك حـ كَ هو اتجاه القطر المزاوج فيكون القطر ك حـ كَ قاطعا للمنحنى فى نقطتين تخيليتين مثل ء$_١$ ، ءَ$_١$ بحيث يكون ــ حـ ء$_١^٢$ مساويا لمربع معلوم فيكون المستقيم المرسوم من ع موازيا للمستقيم ك حـ كَ هو المماس فى نقطة ع . واذا أخذنا على هــذا المماس نقطتين مثل ل ، لَ متساويتى البعد من نقطة ع بحيث يكون

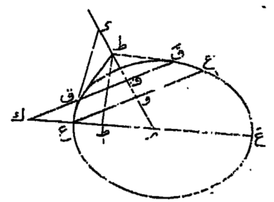
$$لَ ع = ع ل^٢ = ــ حـ ء_١^٢$$

تكون ل ، لَ واقعتين على الخطين التقربيين وبذلك نكون قد عينا الخطين التقربيين وهما حـ ل ، حـ لَ وأما المحوران فهما منصفا الزاوية ل حـ لَ ويكون المحور القاطع هو منصف الزاوية التى نقطة ع بين ضلعيها ثم نأخذ على الخطين التقربيين نقطتين مثل ك ، كَ بحيث يكون

$$حـ ك^٢ = حـ كَ^٢ = حـ ل . حـ لَ$$

فيكون ك كَ هو المماس للقطع الزائد فى احدى رؤوسه ويكون حـ ك = حـ ب واذا فالدائرة التى مركزها حـ ونصف قطرها حـ ك تقطع المحور القــاطع فى البورتين

١١٢ — النظرية الخامسة والعشرون — اذا رسم مستقيم من نقطة ثابتة ليقطع قطاعا مخروطيا فان المماسين فى نقطتى التقاطع يتقاطعان على مستقيم ثابت



لنفرض ن نَ وترا ما مرسوما من النقطة الثابتة ك ولنفرض أن المماسين فى ن ، نَ يتقاطعان فى نقطة ط فيكون ط ح منصفا للوتر ن نَ فى نقطة ف ثم نرسم ط ط١ موازيا للقطر المزاوج للقطر ح ك فيقطع ح ك فى نقطة ط١

فأولا — اذا فرض أن ح ك يقطع المنحنى فى نقطتين حقيقيتين مثل ع ، عَ نرسم ع عَ١ موازيا للوتر ن نَ ونفرض أن المماسين فى ع ، ع١ يتقاطعان فى نقطة ى فتكون هذه النقطة واقعة على القطر ح ط ويكون ح ف . ح ط = ح ى . ح و بفرض و نقطة تقاطع ع عَ١ مع ح ط

حيث ان ط ط١ مواز للمستقيم ع ى فيكون

ح ط١ : ح ع = ح ط : ح ى

= ح و : ح ف لأن ح ف . ح ط = ح ى . ح و

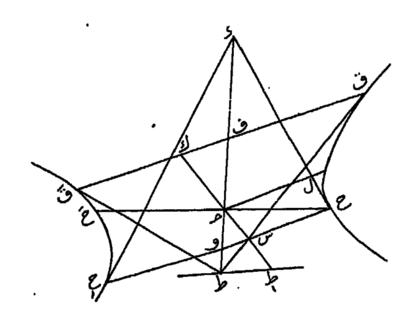
= ح ع : ح ك لأن ع و ، ك ف متوازيان

وبناء عليه يكون ح ك . ح ط١ = ح ع٢ واذا فنقطة ط١ ثابتة (*)

(*) راجع كذلك بند ١٢٤

وثانيا — اذا فرض أن حـ ك لا يقطع المنحنى فى نقطتين حقيقيتين فان القطر المزاوج للمستقيم حـ ك يقطعه فى نقطتين حقيقيتين وليكونا ع ، عَ

ثم نفرض أن ع ع١ وتر مواز للمستقيم ق قَ وقاطع للمستقيم ط حـ فى و وقاطع للمستقيم ك حـ ط١ فى س فيكون المماسان فى نقطتى ع ، ع١ متقاطعين على ط حـ فى نقطة مثل نقطة ء بحيث يكون و حـ . حـ ء = ط حـ . حـ ف [بمقتضى بند ١٠٢]



ثم نفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع القطر الموازى للوتر ق قَ فى نقطة ل بحيث ان حـ ل ، حـ ء قطران متزاوجان فيكون المستطيل ع ل . ع ء ثابتا لجميع اتجاهات الوتر ق قَ [بمقتضى بند ١٠٥]

وحينئذ يكون س حـ : حـ ك = و حـ : حـ ف

= حـ ط : ء حـ لان حـ ط . حـ ف = حـ و . حـ ء

= حـ ط١ : ء ع

لان المثلثين ط ح ط$_1$ ، ح ء ع أضلاعهما متوازية واذا فهما متشابهان ومنه ينتج أن ح ك . ح ط$_1$ = س ح . ء ع = — ع ل . ع ء = مقدارا ثابتا . واذا فنقطة ط$_1$ ثابتة وبناء عليه تكون نقطة ط واقعة على مستقيم ثابت .

تعريف — المستقيم الذى هو المحل الهندسى لنقطة تقاطع المماسين لقطاع مخروطى المرسومين من نهايتى أى وتر مار بنقطة ثابتة يسمى المحور القطبي لهذه النقطة بالنسبة للمنحنى وتسمى النقطة الثابتة قطب هذا المستقيم بالنسبة للمنحنى أيضا ومن السهل استنتاج عكس هذه النظرية فنقول

اذا أخذت نقطة ما على مستقيم معلوم ورسم منها مماسان لقطاع مخروطى فان المستقيم الواصل بين نقطتى التماس يمر بنقطة ثابتة

اذا فرضت نقطة ك خارج المنحنى فانه يمكن رسم مستقيمين منها يقطع كل منهما المنحنى فى نقطتين منطبقتين وهذان المستقيمان هما المماسان من نقطة ك وعند ماينطبق النقطتان ى ، ى َ تنطبق عليهما نقطة تقاطع المماسين المرسومين من ى ، ى َ واذا فاذا فرضت نقطة خارج منحن مثل نقطة ك فان المماسين فى نهايتى أى وتر مار بها يتقاطعان على المستقيم الواصل بين نقطتى التماس للمماسين المرسومين من نقطة ك

نتيجة ١ — المحور القطبي لنقطة ثابتة بالنسبة لقطاع مخروطى يقطع المنحنى فى نقطتين حقيقيتين أو لا يقطعه على حسب ما اذا كانت النقطة الثابتة خارج المنحنى أو داخله

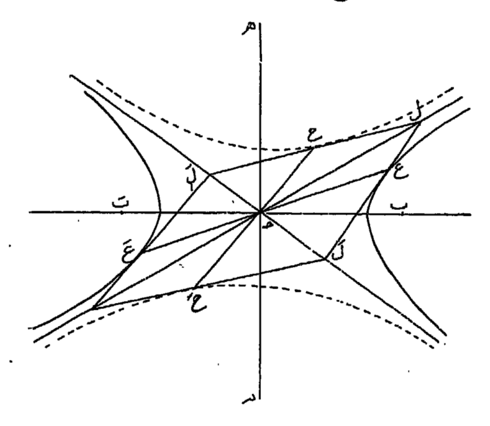
نتيجة ٢ — اذا كان المحور القطبي لنقطة مثل نقطة ا بالنسبة لقطاع مخروطى يمر بنقطة ب فان المحور القطبي لنقطة ب يمر بنقطة ا

القطع الزائد المزاوج

١١٣ — القطعان الزائدان اللذان لهما خطان تقربيان مشتركان وبورهما على بعد واحد من المركز المشترك يسميان قطعين زائدين متناظرين أو متزاوجين

وحيث ان محورى القطع الزائد منصفان للزاويتين الواقعتين بين الخطين التقربيين فتكون محاور القطعين الزائدين المتزاوجين منطبقين بمعنى أن المحور القاطع لأحد المنحنيين يكون هو المحور غير القاطع للمنحنى الثانى

لنفرض نقطة مثل نقطة ع على منحنى قطع زائد بورتاه ب ، بَ ونفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الخطين التقربيين فى ل ، لَ على التناظر



ثم نرسم من نقطة ل المستقيم ل ح لَ١ مماسا للقطع الزائد المناظر فى نقطة ح ويقطع الخط التقربى ح لَ فى نقطة لَ١ فتكون نقطة ح منتصف ل لَ١ ويكون ح ل . ح لَ١ = ح هـ٢ بفرض هـ احدى بورتى القطع الزائد المناظر

وحينئذ يكون ل ح . ح ١َ = ح هـ^{٢} = ح بَ^{٢} = ل ح . ح لَ

∴ لَ ح = ح لَ

ولكن ل ع = ع لَ$_{١}$ ، ل ع = ع لَ واذا يكون ح ع موازيا للماس ل ع لَ ، ح ع موازيا للماس ل ع لَ$_{١}$

فيتضح اذا أن القطعين الزائدين المتزاوجين اقطارهما المزدوجة منطبقة وأن القطر الذى يقطع أحد المنحنيين فى نقط حقيقية منطبق على القطر الذى يقطع المنحنى الثانى فى نقط تخيلية

وحيث ان ع ح ع ل متوازى اضلاع فيكون المستقيم ع ع وكذلك عَ ع موازيا لأحد الخطين التقربيين وينصفه الخط التقربى الآخر

وواضح أن مساحة متوازى الاضلاع المكون من المماسين فى نهايتى القطر ع ح عَ لأحد المنحنيين ومن المماسين فى نهايتى الوتر المزاوج فى المنحنى المناظر تساوى أربعة أمثال المثلث لـ ح لـَ واذا فهى ثابتة

وحيث أن ع ع = ع لـ فبمقتضى بند ١١٣ يكون ح عَ^{٢} — ع ع^{٢} ثابتا فيتضح اذا أن الفرق بين مربع أى قطر من أقطار القطع الزائد ومربع القطر المزاوج فى القطع الزائد المناظر ثابت

القطع الزائد القائم

١١٤ — اذا قطع دليل قطع زائد قائم الخطين التقربيين ح ى ، ح ىَ فى نقطتى ى ، ىَ على التناظر وكانت ب هى البورة المناظرة لهذا الدليل فبمقتضى بند ٩١ تكون كل من الزاويتين ب ى ح ، ب ىَ ح قائمة ومنه ينتج أن الشكل ب ى ح ىَ مربع وأن ح ب^{٢} = ٢ ح ى^{٢} = ٢ ح ١^{٢}

وحينئذ فالاختلاف المركزى للقطع الزائد القائم يساوى $\sqrt{٢}$

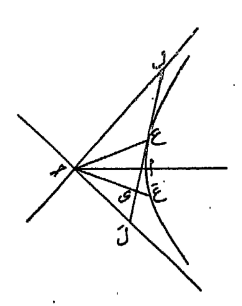
١١٥ — النظرية السادسة والعشرون — القطران المتزاوجان فى قطع زائد يصنعان مع الخط التقربى زاويتين متساويتين

للبرهنة على ذلك نفرض أن المماس فى نقطة ما مثل نقطة ع يقطع الخطين التقريبيين فى نقطتى ل ، لَ

فحيث ان الزاوية ل حـ لَ قائمة ، ع منتصف ل لَ [بمقتضى بند ١٠٦] فتكون ع مركز الدائرة ل حـ لَ وتكون الزاويتان ع حـ ل ، ع ل حـ متساويتين واذا فاذا كان حـ ءٔ هو القطر المزاوج للقطر حـ ع والموازى بناء على ذلك للمستقيم ل ع لَ فيكون حـ ع ، حـ ءٔ صانعين زاويتين متساويتين مع كل من الخطين التقربيين

نتيجة — الزوايا الواقعة بين اى قطرين أو أى وترين لقطع زائد قائم اما مساوية أو مكملة للزوايا الواقعة بين القطرين المزاوجين لهما

١١٦ — النظرية السابعة والعشرون — مجموع مربعى القطرين المتزاوجين أو القطرين المتعامدين فى قطع زائد قائم يساوى صفرا



لنفرض أن المماس فى نقطة ما مثل ع يقطع الخطين التقربيين فى ل ، لَ
فمن المعلوم بمقتضى النظرية الثانية والعشرين أن مربع حء١ الذى هو نصف القطر المزاوج للمستقيم ح ع يساوى — ع ل٢

ولكن الزاوية ل ح لَ قائمة ، نقطة ع منتصف ل لَ فحينئذ يكون ع ل = ح ع وبناء عليه يكون ح ع٢ + حء١٢ = ح ع٢ — ع ل٢ = ٠

ثم نفرض أن ح عَ هو نصف القطر الموضوع بحيث تكون الزاويتان عَ ح ا ، ا ح ع متساويتين ونفرض أن ح عَ يقطع ل ع لَ فى نقطة ى
فيحدث > ى ح ع + ى ع ح = ٢ > ا ح ع + ٢ > ع ح ل
= ٢ > ا ح ل = زاوية قائمة

فحينئذ يكون ح عَ عمودا على ل ع لَ

وحيث ان ح ع ، ح عَ متساويا الميل على المحور القاطع فيكون ح ع = ح عَ واذا يحدث ح عَ٢ + حء١٢ = ح ع٢ + حء١٢ = ٠

وحيث لايوجد فى القطاع المخروطى سوى زوجين من الأقطار المتساوية وكل اثنين من هذه الاقطار متساويا الميل على المحور فينتج أنه اذا كان مجموع مربعى قطرين فى قطع زائد قائم يساوى صفرا فيلزم أن يكون القطران اما متزاوجين أو متعامدين

وبالعكس اذا كان فى قطاع مخروطى (١) مجموع مربعى قطرين متزاوجين يساوى صفرا أو (٢) مجموع مربعى قطرين متعامدين يساوى صفرا فالقطاع فى كل من هاتين الحالتين هو قطع زائد قائم

ويلزم أن يكون القطاع قطعا زائدا لان طول أحد القطرين حقيقى والثانى تخيلى

لنفرض ع احدى نهـايتى القطر الحقيقى ونفرض أن المماس فى نقطة ع يقطع الخطين التقربيين فى ل ، لَ

ففى الحالة الاولى حيث ان

$$ح ع^٢ = - ح ء_١^٢ = ع ل^٢ \text{ فيكون } ح ع = ل ع = ع لَ$$

واذا فالزاوية ل ح لَ يلزم ان تكون قائمة

ولاثبات الحالة الثانيـة نقول اذا فرض أن ح ع هو القطر الحقيقى ورسم ك ع كَ عمودا على ح ع ليقطع الخطين التقربيين للمنحنى فى ك ، كَ على التناظر فمن المعلوم أن ع ك × ع كَ يساوى $ح ء_١^٢$ وهو مربع نصف القطر الموازى للمســتقيم ك ع كَ واذا فيكون بمقتضى الفرض ك ع . ع كَ $= - ح ء_١^٢ = ح ع^٢$

وحيث ان ح ع عمود على ك ع كَ ، ك ع . ك عَ $= ح ع^٢$

فينتج أن الزاوية ك ح كَ قائمة

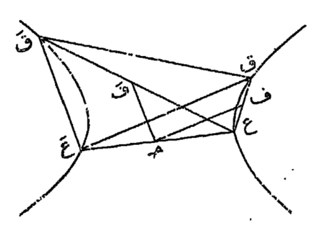
(مسألة ١) المطلوب رسم قطع زائد قائم اذا علم المركز ونقطتان على المنحنى

(مسألة ٢) المطلوب رسم قطع زائد قائم اذا علم خط تقــربى ونقطتان على المنحنى

(مسألة ٣) المطلوب رسم قطع زائد قائم اذا علمت نقطتان على المنحنى وعلم المماسان فى هاتين النقطتين

١١٧ — النظرية الثامنة والعشرون — كل وتر من أوتار القطـع الزائد القائم يقـابل زاويتين متساويتين أو متكاملتين رأساهما فى نهايتى أى قطر من أقطاره

لنفرض ى ، ى َ نهايتي وترما فى قطع زائد قائم ونفرض ان ع ح عَ قطر من أقطاره



ثم نصل ى ع ، ىَ ع ، ى عَ ، ىَ عَ وننصف ع ى فى نقطة ف ، ع ىَ فى فَ ونصل ح ف ، ح فَ

فتكون الزاوية ى ع ىَ الواقعة بين الوترين ع ى ، ع ىَ مساوية أو مكملة للزاوية ف ح فَ الواقعـة بين القطرين المزاوجين لهما ح ف ، ح فَ

ولكن حيث ان ع ى تنصفه نقطة ف ، ع عَ تنصفه نقطة ح فيكون ح ف موازيا للمستقيم عَ ى وكذلك يكون ح فَ موازيا للمستقيم عَ ىَ

وحينئذ تكون ف $<$ ى عَ ىَ $=$ $<$ ح فَ

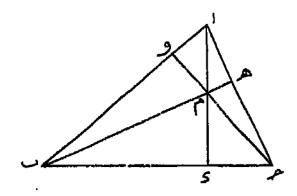
وحينئذ فالزاويتان ى عَ ىَ ، ى ع ىَ إما متساويتان أو متكاملتان

نتيجة ــ المحل الهندسى لنقطة ما مثل نقطة ح التى تتحرك بحيث يكون الفرق بين الزاويتين ح ب ا ، ح ا ب ثابتا مع فرض ا ، ب نقطتين ثابتتين هو قطع زائد قائم أحد أقطاره المستقيم ا ب

وذلك لأنه اذا رسم القطع الزائد القائم الذى قطره ا ب ويمر بأحد أوضاع النقطة المتحركة فمن السهل البرهنة على أن كل وضع آخر لهذه النقطة المتحركة يكون على هذا القطع الزائد

١١٨ — النظرية التاسعة والعشرون — اذا كان قطع زائد قائم يمر برؤوس مثلث فانه يمر أيضا بنقطة تقاطع الاعمدة النازلة من الرؤوس على الاضلاع وبالعكس كل منحن يمر برؤوس مثلث وبنقطة تقاطع الاعمدة النازلة من الرؤوس على الاضلاع فهو قطع زائد قائم

لنفرض ا ى ، ب هـ ، حـ و أعمدة نازلة من رؤوس المثلث ا ب حـ على الاضلاع المقابلة لها ونفرض أنها تتقاطع فى نقطة م



فمن الواضح أن المستطيلين ب ى . ى حـ ، ى م . ى ا متساويان ثم نفرض أن المستقيم ى ا يقطع القطع الزائد القائم المار بالرؤوس الثلاثة ا ، ب ، حـ فى نقطة أخرى مثل ع وحيث ان مجموع مربعى القطرين المتعامدين يساوى صفرا فيلزم أن يكون ى ع . ى ا = — ى ب . ى حـ = ب ى . ى حـ

واذن يكون ى م . ى ا = ى ع . ى ا أى أن نقطة ع يلزم أن تكون منطبقة على نقطة م وبالعكس اذا فرض أن قطاعا مخروطيا يمر بالرؤوس الثلاثة ا ، ب ، حـ وبنقطة م فهو قطع زائد قائم لأنه حيث ان

ى و . ى ا = — ى ب . ى حـ

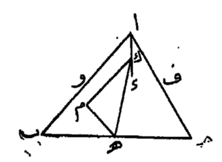
فينتج أن مجموع مربعى اى قطرين متعامدين يساوى صفرا وذلك لايتأتى الا اذا كان المنحنى قطعا زائدا قائما [بمقتضى النظرية السابعة والعشرين]

نتيجة — جميع المنحنيات المارة بنقط تقاطع قطعين زائدين قائمين هى قطاعات زائدة قائمة

١١٩ — النظرية الثلاثون — المحل الهندسى لمراكز القطاعات الزائدة القائمة المرسومة على مثلث هو دائرة التسع النقط لهذا المثلث

لنفرض ا ، ب ، حـ رؤوس المثلث الثلاثة ، ى نقطة تقاطع الارتفاعات فمن المعلوم أن كل قطع زائد قائم مار بالنقط الثلاثة ا ، ب ، حـ يمر كذلك بنقطة ى

ولنفرض أن هـ ، ف ، و ، ك هى النقط المنصفة للمستقيمات ب حـ ، حـ ا ، ا ب ، ا ى على التناظر



فحيث ان الزاوية الواقعة بين أى وترين مساوية أو مكملة للزاوية الواقعة بين القطرين المزاوجين لهما فاذا فرض أن م هى مركز أحد القطعين الزائدين القائمين فتكون الزاوية هـ م ك مساوية أو مكملة للزاوية الواقعة بين ب حـ ، ا ى وهى زاوية قائمة واذا تكون م واقعة على محيط الدائرة التى قطرها هـ ك وهى دائرة التسع النقط فى المثلث ا ب حـ

(مسألة ١) المطلوب ايجاد مركز القطع الزائد القائم الذى يمر بأربع نقط معلومة

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن دوائر التسع النقط فى المثلثات الأربعة التى رؤس كل منها ثلاث نقط من أربع نقط معلومة تتقابل فى نقطة

الأشكال النهائية للقطاعات المخروطية

١٢٠ — قد اعتبرنا فى كل ماتقدم أن بورة القطاع المخروطى على بعد محدود من الدليل ولكن قد لايكون الامر كذلك فعند ما تكون البورة على الدليل والاختلاف المركزى أكبر من الوحدة من الواضح أن المنحنى فى هذه الحالة يكون عبارة عن مستقيمين مارين بالبورة وهذان المستقيمان يقربان من الانطباق كلما قرب الاختلاف المركزى من الوحدة

واذا فيمكن اعتبار المستقيمين المتقاطعين قطعا زائدا بورتاه ومركزه هى نقطة تقاطعهما ودليله آحد المنصفين للزوايا الواقعة بينهما وكذلك يمكن اعتبار المستقيمين المنطبقين على بعضهما قطعا مكافئا

ويجب أن نلاحظ أن الدائرة عبارة عن قطاع مخروطى دليله فى مالانهاية وبورتاه منطبقتان على مركز الدائرة واختلافه المركزى يساوى صفرا وكذلك يمكن اعتبار المستقيمين المتوازيين قطعا مكافئا كل من بورته ودليله على بعد فى ما لا نهاية

مسائل

(١) من نقطة ثابتة مثل نقطة ب قد رسم المستقيم ب ع ليقطع محيط دائرة ثابتة فى نقطة ع ثم نرسم ع ى بحيث تكون الزاوية ب ع ى ذات مقدار معلوم والمطلوب البرهنة على أنّ ع ى يغلف منحنيا احدى بورتيه نقطة ب ثم ايجاد وضع البورة الثانية

(٢) من نقطة على منحنى قطع زائد مثل نقطة ع قد رسم مستقيم مواز لاحد الخطين التقربيين فقطع الخط التقربى الثانى فى نقطة م ومن نقطة مثل نقطة ى قد رسم مستقيم مواز للخط التقربى الثانى فقطع الخط التقربى الأول فى نقطة ه والمطلوب البرهنة على ان م ه مواز للمستقيم ع ى

(٣) اذا فرض أن المماس لقطع زائد فى نقطة منه مثل ع يقطع أحد الخطين التقربيين فى نقطة ط ورسم ط ں ر موازيا للخط التقربى الثانى فقطع المنحنى فى نقطة ں وقطع المستقيم المرسوم من ع موازيا للخط التقربى الأول فى ر فالمطلوب البرهنة على أن ں هى منتصف ط ر

(٤) اذا فرض ان مماسا لقطع زائد فى نقطة ما مثل ع يقطع خطا تقربيا فى نقطة ط ثم رسم ر ع رَ موازيا لهذا الخط التقربى فقطع أحد الدليلين فى رَ وقطع ب ط فى ر مع فرض أن ب هى البورة المناظرة لهذا الدليل فالمطلوب البرهنة على أن ع منتصف ر رَ

(٥) اذا فرض أن منحنيا ذا محور قاطع معلوم له بورة منطبقة على بورة قطع مكافئ معلوم وفرض أنه يمس منحنى القطع المكافئ فالمطلوب البرهنة على ان هذا المنحنى يمس أيضا قطعا مكافئا آخر مشتركا مع القطع المكافئ المعلوم فى المحور والبورة

(٦) اذا رسمت جملة منحنيات قطاعات مخروطية ذات بورة مشتركة ومحاورها القاطعة مساوية لمستقيم معلوم ومراكزها واقعة على محيط دائرة ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن جميع هذه المنحنيات تمس منحنيين ثابتين

(٧) المطلوب ايجاد مركز ومحورى قطع زائد قائم اذا علمت احدى بورتيه وخط تقربى ومماس آخر

(٨) المطلوب رسم القطاعات الزائدة التى لها بورة معلومة وتمر بنقطة معلومة والتى خطوطها التقربية موازية لمستقيمين معلومين

(٩) اذا رسم خط مستقيم فى اتجاه معلوم ليقطع قطعين زائدين ثابتين مشتركين فى الخطين التقربيين فى النقطتين ع عَ والنقطتين ں ، ںَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على ان المستطيل ع ں . ں عَ ثابت

(١٠) ع ﻫ عبارة عن راسى نقطة من منحنى قطع زائد قائم مثل نقطة ع و ﻫ ى هو المماس للدائرة الاصلية والمطلوب البرهنة على ان ع ى يمر باحدى راسى القطع الزائد

(١١) اذا رسمت مماسات متوازية لجملة دوائر مارة بنقطتين معلومتين فالمطلوب البرهنة على ان المحل الهندسى لنقط التماس هو قطع زائد قائم

(١٢) اذا رسمت جملة أزواج من دوائر متساوية تمر بنقطتى ا و ب ونقطتى ا و ح على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن نقطة التقاطع الثانية واقعة على قطع زائد قائم مار بالنقط ا و ب و ح وأحد أقطاره هو المستقيم ب ح

(١٣) اذا فرض أن نقطة تتحرك بحيث ان المستقيمين الواصلين بينها وبين نقطتين ثابتتين يصنعان مع مستقيم ثابت زاويتين متساويتين فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لهذه النقطة هو قطع زائد

(١٤) اذا رسم مثلث متساوى الاضلاع فى قطع زائد قائم فالمطلوب البرهنة على أن مركز الدائرة المرسومة عليه واقع على منحنى القطع الزائد المذكور

(١٥) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقط تقاطع دائرتين متساويتين يمسهما مستقيمان متوازيان معلومان فى نقطتين ثابتتين مثل ا و ا َ على التناظر مركزاهما فى جهة واحدة من ا ا َ هو قطع زائد قائم

(١٦) اذا رسم متوازى أضلاع فى قطع زائد قائم فالمطلوب البرهنة على أن المستطيل المكون من العمودين النازلين من نقطة مّا من المنحنى على ضلعين متوازيين يساوى المستطيل المكون من العمودين النازلين من هذه النقطة على الضلعين الموازيين الآخرين.

(١٧) اذا فرضت نقطتان مثل ع و ى على قطع زائد قائم والقطع الزائد المناظر له على التناظر بحيث يكون ع ى مقابلا لزاوية قائمة رأسها المركز

المشــترك فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمنتصف ع ن هو قطع زائد قائم آخر خطاه التقربيان هما محورا المنحنيين الاصليين

(١٨) اذا رسم ممـاسان لقطع زائد فى نقطتى تقاطعه بمستقيم مماس للقطع الزائد المناظر الاول فالمطلوب البرهنـة على أن نقط تقاطع المماسات الثلاثة واقعة على القطع الزائد المتاظر

(١٩) المطلوب البرهنة على أن الاوتار المشــتركة بين قطع زائد ودائرة أيا كانت يمكن أن تجمع أزواجا بحيث تقطع الخطين التقربيين فى نقط جميعها على محيط دائرة وأن هذه الدوائر مشتركة مع الدائرة الاولى فى المركز

(٢٠) اذا فرض أن العمودين على قطاع مخروطى فى نقطتى ن ، نَ يتقاطعان على زوايا قائمة فى نقطة ك ويقطعان المنحنى فى نقطتين أخريين مثل ن١ ، ن١َ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ن١ ن١َ مواز للمستقيم ن نَ

(٢١) اذ فرض أن مســتقيما يقطع الخطين التقربيين لقطاع مخــروطى فى نقطتى ر ، رَ ويقطع أىّ قطرين متزاوجين فى ع ، عَ وكانت ف هى منتصف رَ ر فالمطلوب البرهنة على أن ف ر٢ = ف ع . ف عَ

(٢٢) اذا رسم قطع زائد بورته بورة قطع زائد معلوم ودليله ممـاس للقطع الزائد المعلوم أيضا وكان المحور غير القاطع لهــذا المنحنى ممـاسا له فالمطلوب البرهنة على أن المنحنيين متشابهان

(٢٣) اذا رسم من نقطة مّا على قطع زائد مماس للدائرة الأصلية فالمطلوب البرهنة على أن هذا المماس يساوى نصف المحور الأصغر للقطع الناقص المشترك مع المنحنى الأول فى البور ومار بالنقطة المذكورة

(٢٤) اذا فرض أن المماسين لقطع زائد فى نهايتى وتر مّا يتقاطعان فى نقطة ط ورسم ط م ، ط مَ موازيين للخطين التقربيين فقطعا فى م ، مَ المماسين المذكورين فالمطلوب البرهنة على أن م مَ مواز للوتر المذكور

(٢٥) اذا فرض أن محيط دائرة يقطع قطعا زائدا قائما فى ع ٦ عَ ٦ ں ٦ ںَ فالمطلوب البرهنة على أن المماسين فى ع ٦ عَ يتقاطعان على القطر العمودى على ں ںَ

(٢٦) اذا رسم مستقيم حيثما اتفق من نقطة معلومة مثل نقطة ع ليقطع مستقيمين ثابتين فى نقطتى ں ٦ ںَ على التناظر وأخذت نقطة عَ على هذا المستقيم بحيث يكون ں ع = عَ ںَ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة عَ هو قطع زائد

(٢٧) اذا فرض أن مستقيما يمر بنقطة ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمنتصف جزء المستقيم المحدود بمستقيمين معلومين هو قطع زائد

(٢٨) اذا كان ط ں ٦ ط ںَ مماسين لقطع زائد قائم مركزه نقطة ح وكان المنصفان للزاوية ں ط ںَ يقطعان ں ںَ فى نقطتى ى ٦ ىَ فالمطلوب البرهنة على أن ح ى ٦ ح ىَ هما المنصفان للزاوية ں ح ںَ

(٢٩) اذا فرض أنه من نقطة ثابتة مثل نقطة ك رسم الوتر ع ں فى قطع زائد ورسم ع ل ٦ ں ل موازيين للخطين التقريبيين فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ل هو قطع زائد خطاه التقريبيان موازيان للخطين التقريبيين للقطع الزائد المعلوم ومركزه النقطة الثابتة ك

(٣٠) اذا فرضت ع نقطة ما على قطع زائد بورتاه ب ٦ هـ وكان المماس فى نقطة ع قاطعا لأحد الخطين التقريبيين فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن الزاوية الواقعة بين الخط التقربى والمستقيم هـ ع هى ضعف الزاوية ب ط ع

(٣١) اذا فرض أن مماسين لقطع زائد من نقطة ما مثل نقطة ك يقطعان أحد الدليلين فى نقطتى ط ٦ طَ وكانت ب هى البورة المناظرة لهذا الدليل فالمطلوب البرهنة على أن الدائرة التى مركزها نقطة ك ويمسها المستقيمان

ب ط ، ب طَ تقطع هـذا الدليل فى نقطتين بحيث يكون نصفا القطرين الواصلين اليهما من المركز ك موازيين للخطين التقربيين

(٣٢) المطلوب رسم قطع زائد يمر برؤس متوازى أضلاع معلوم ويكون أحد خطيه التقربيين فى اتجاه معلوم

(٣٣) اذا فرض أن ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ثابتة فالمطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم قطعين مكافئين يمران بالنقطتين ا ، ب وبورتهما نقطة حـ وأن محورى هـذين المنحنيين موازيان للخطين التقربيين للقطع الزائد الذى يمكن رسمه مارا بنقطة حـ وبورتاه هما النقطتان ا ، ب

(٣٤) اذا رسمت دائرة تمر بنقطتى ع ، عَ وهما نهايتا قطر ما فى قطع زائد قائم وتقطع فى ط المستقيم المماس للمنحنى فى ع فالمطلوب البرهنة على أن عَ ط والمماس للدائرة فى نقطة ع يتقاطعان على القطع الزائد المذكور

(٣٥) اذا فرض أن المماس لقطع زائد قائم فى نقطة ثابتة يقطع أى قطرين متزاوجين مثل حـ ط ، حـ طَ فى ط ، طَ فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز الدائرة حـ ط طَ هو خط مستقيم

(٣٦) اذا فرض أن ع عَ قطر حيثما اتفق فى قطع زائد قائم ، ن نقطة ما على المنحنى ثم رسم ع ر ، عَ ر عمودين على ع ن ، عَ ن على التناظر فقطعا فى نقطتى ر ، رَ العمود على المنحنى فى نقطة ن فالمطلوب البرهنة على أن ن ر ، ن رَ متساويان

(٣٧) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لبوز القطاعات المخروطية التى تمسها الاضلاع الاربعة لمتوازى أضلاع هو قطع زائد قائم

(٣٨) اذا رسمت دائرة وقطع زائد قائم على المثلث القائم الزاوية ا ب حـ بفرض أن حـ هى الزاوية القائمة وكان المماس للدائرة فى نقطة حـ قاطعا للقطع الزائد فى حـَ فالمطلوب البرهنة على أن المماسين للقطع الزائد فى حـ ، حـَ يتقاطعان على ا ب

(٣٩) اذا فرض أن المماسين لقطاع مخروطى معلوم من نقطة يصنعان زاويتين متساويتين مع مستقيم معلوم فالمطلوب البرهنة على أن هذه النقطة يلزم أن تكون واقعة على قطع زائد قائم مار ببورتى المنحنى الأول

(٤٠) المطلوب ايجاد مركز قطع زائد قائم اذا علمت ثلاث نقط على المنحنى والمماس فى احداها

(٤١) اذا فرض أن ك ط هو المماس فى نقطة ك لمنحنى قطع زائد قائم مركزه ح وأن ع ن وتر يقطع فى نقطة ط المماس المذكور بالتعامد فالمطلوب البرهنة على أن منصفى الزاوية ك ح ط ينصفان المستقيمين ك ع ، ك ن

(٤٢) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقط تقاطع المستقيمات المماسة لقطع ناقص والتى تصنع زوايا متساوية مع المحور الأكبر والمحور الاصغر على التناظر ولكنها غير متعامدة هو قطع زائد قائم رأساه بورتا القطع الناقص المذكور

(٤٣) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنهايات الاقطار المتوازية لجملة دوائر ذات محور مشترك هو قطع زائد قائم

(٤٤) اذا رسم مربع على محيط دائرة وفرض أن مماسا ما لهذه الدائرة يقطع ضلعين متوازيين من أضلاع هذا المربع فى نقطتى ع ، ن وأن مماسا آخر موازيا للاول يقطع ضلعى المربع الآخرين فى نقطتى ر ، س فالمطلوب البرهنة على أن الأربع نقط ع ، ن ، ر ، س واقعة على قطع زائد قائم مار بمركز الدائرة ومركزه على محيط الدائرة

(٤٥) اذا فرض أن الوتر ع عَ فى قطع زائد يقطع الخطين التقربيين فى ر ، رَ وفرض أن ح ط ف هو القطر المنصف لهذا الوتر فى نقطة ف وأن ط هى نقطة تقاطع المماسين فى نهايتى الوتر فالمطلوب البرهنة على أن متوازى الاضلاع الذى قطره ط ف وأضلاعه موازية للخطين التقربيين

تكون رؤوســه الأخرى واقعة على المنحنى وقطره الثانى مواز للستقيم ع عَ وانه هو الثالث المتناسب مع الخطين ر ف ، ع ف

(٤٦) اذا فرضت جملة نقط على قطر ثابت فى قطاع مخروطى ذى مركز وأنزلت منهـا أعمـدة على محاورها القطبية فالمطلوب البرهنـة على أن المحل الهندسى لمواقع هذه الاعمدة هو قطع زائد قائم

(٤٧) اذا فرض أن ع عَ قطر قطع زائد قائم وأن محيط الدائرة التى مركزها نقطة ع ونصف قطرها ع عَ يقطـع المنحنى فى ا ، ب ، ح فالمطلوب البرهنة على أن ا ب ح مثلث متساوى الأضلاع

(٤٨) المطلوب رسم قطع زائد اذا علمت ثلاث نقط على المنحنى واتجاها الخطين التقاربيين

(٤٩) اذا رسم محيط دائرة مار بالبورة ب لمنحنى قطع زائد اختلافه المركزى يساوى ٢ ومار بالرأس الثانية اَ لهذا المنحنى فقطعه فى اَ ، ع ، ى ، ر فالمطلوب البرهنة على ان ع ى ر مثلث متساوى الاضلاع

(٥٠) اذا علم خط تقربى لقطاع مخروطى وعلمت نقطتان منه فالمطلوب البرهنة على ان المحورين يغلقان قطعا مكافئا .

(٥١) اذا فرض أن قطاعا مخروطيا يمس الأضلاع الثلاثة ب ح ، ح ا ، ا ب للمثلث ا ب ح فى ع ، ى ، ر على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ا ع ، ب ى ، ح ر تتقابل فى نقطه

(٥٢) اذا فرض ان قطاعا مخروطيا يمس الأضلاع الثلاثة ب ح ، ح ا ، ا ب لمثلث ما فى ع ، ى ، ر على التناظر وفرض ان المستقيمات ى ر ، ر ع ، ع ى تقطع ب ح ، ح ا ، ا ب على التناظر فى ل ، م ، ن فالمطلوب البرهنة على ان ل ، م ، ن واقعة على خط مستقيم

(٥٢) اذا فرض أن قطاعا مخروطيا يقطع الاضلاع الثلاثة ب ح ، ح ا ، ا ب للمثلث ا ب ح فى نقطتى ع ، عَ ونقطتى ى ، ىَ ونقطتى ر ، رَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على ان ب ع . ب عَ . ح ى . ح ىَ . ا ر . ا رَ = ب ر . ب رَ . ا ى . ا ىَ . ح ع . ح عَ [نظرية كارنوت]

(٥٤) اذا رسم مماسان لقطع زائد من نقطة مّا على قطع زائد مشترك مع الأول فى الخطين التقربيين فالمطلوب البرهنة على أن وتر التماس يحدد مساحة ثابتة على الخطين التقربيين

(٥٥) اذا فرض ان محيط دائرة يقطع قطعا زائدا فى أربع نقط فالمطلوب البرهنة على أن حاصل ضرب أبعاد هـذه النقط عن أحد الخطين التقربيين يساوى حاصل ضرب أبعادها عن الخط التقربى الثانى

(٥٦) اذا فرض أن قطعـا زائدا قائمـا يقطع محيط دائرة فى أربع نقط فالمطلوب البرهنة على ان مركز الوضع المتوسط للنقط الاربعة يكون فى منتصف البعد بين مركزى المنحنيين

(٥٧) معلوم أربع نقط على محيط دائرة والمطلوب البرهنة على أن مراكز القطاعات الزائدة القـائمة الخمسة التى يمر كل منها بأربع نقط من الخمس النقط المعلومة واقعة جميعها على محيط دائرة نصف قطرها يساوى نصف نصف قطر الدائرة المعلومة

(٥٨) اذا رسم ممـاسان لقطاع مخروطى معـلوم من نقطة خارجة عنـه وفرض ان النقط الاربعة التى يتقاطع فيها المماسان بمحورى هذا المنحنى واقعة على محيط دائرة فالمطلوب البرهنة على أن النقطة المرسوم منها المماسان واقعة على قطع زائد قائم مار ببورتى المنحنى المذكور

(٥٩) اذا فرض ان المماسين لقطاع مخروطى معـلوم فى نقطتى ى ، ىَ متعامدان فالمطلوب البرهنة على ان المستقيم ى ىَ يمس على الدوام منحنيا ثابتا متحدا مع المنحنى الأول فى البور

(٦٠) اذا رسم المستقيمان ط ع ، ط عَ من نقطة مّا مثل ط ورسم منها ايضا مماسان لقطاع مخروطى واحد من نقطة مّا مثل ط ورسم منها أيضا المستقيمان ط ن ، ط نَ مماسين لمنحن آخر متحد مع الأول فى البور فالمطلوب البرهنة على ان ع ن ، ع نَ متساويا الميل على المماس فى نقطة ع

(٦١) اذا فرض ان ع عَ ، ن نَ وترا التماس لزوجين من المماسات المرسومة من نقطة ط لكل من قطاعين مخروطيين متحدين فى البور وبورتاهما ب ، بَ فالمطلوب البرهنة على أنه اذا كانت النقط ع ، ن ، ب واقعة على خط

مستقيم يكون ن بَ عَ وكذلك ع بَ نَ على خط مستقيم والمطلوب البرهنة أيضا على ان المحل الهندسى لنقطة ط هو خط مستقيم عمود على ب بَ

(٦٢) اذا فرض أن ط ع مماس لقطاع مخروطى وأن ط ن عمودى على هذا المنحنى ومماس لمنحن متحد مع الاول فى البور فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين ط ومركز المنحنيين منصف للمستقيم ع ن

(٦٣) اذا فرض ان ط ع مماس لمنحنى قطاع مخروطى ثابت وان ط ن عمودى على هذا المنحنى ومماس لمنحن آخر متحد مع الاول فى البور فالمطلوب البرهنة على ان ع ن يمس منحنيا ثالثا ثابتا متحدا مع المنحنيين الآخرين فى البور

(٦٤) اذا رسمت مماسات موازية لمستقيم معلوم لجملة منحنيات متحدة فى البور فالمطلوب البرهنة على أن نقط التماس واقعة على قطع زائد قائم مار بهذه البورة

(٦٥) اذا رسم متوازى أضلاع على منحنى قطاع مخروطى وكانت موازية أضلاعه لمستقيمين ثابتين فالمطلوب البرهنة على ان رؤسه الأربعة واقعة على قطع زائد قائم لجميع المنحنيات المشتركة فى البور

(٦٦) اذا فرض أن ع نقطة مّا على منحنى قطع ناقص ٬ ع١ النقطة المناظرة لها على الدائرة الأصلية فالمطلوب البرهنة على أن أحد الخطين التقربيين للقطع الزائد المتحد مع القطع الناقص المذكور فى البور ومارّ بنقطة ع يمر بنقطة ع١

(٦٧) اذا رسمت مماسات لجملة قطاعات مخروطية مشتركة فى البور من نقطة ثابتة على المحور القاطع فالمطلوب البرهنة على أن نقطة التماس واقعة على محيط دائرة

(٦٨) اذا فرض أن أضلاع مثلث مرسوم فى منحنى قطاع مخروطى تمس قطاعا مخروطيا آخر متحدا مع الاوّل فى البور فالمطلوب البرهنة على أن نقط التماس واقعة على الدوائر التى تمس أضلاع المثلث من الخارج

(٦٩) اذا فرض أن العمود النازل من نقطة مّا على المحور القطبى لها بالنسبة لقطاع مخروطى معلوم يمر بنقطة ثابتة مثل نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن هـذا المحور القطبى مغلف لمنحنى القطع المكافئ الذى يمس محورى المنحنى المعلوم . والمطلوب البرهنة أيضا على أنه يمكن تعيين منحنى القطع المكافئ أيضا اذا كان المنحنى المعلوم أحد جملة منحنيات معلومة متحدة فى البور

(٧٠) اذا فرض أن ك ع ٬ ك ن مماسان لقطاع مخروطى فالمطلوب البرهنة على أن عمودىِّ المنحنى فى ع ٬ ن والمستقيم ع ن جميعها مماسة لمنحنى قطع مكافئ مماس لمحورى المنحنى الأوّل

(٧١) اذا فرض أن ا ب ح مثلث مرسوم فى قطع ناقص وأن قطعا ناقصا آخر متحدا مع الاول فى البور يمس أضلاع المثلث فى اَ ٬ بَ ٬ حَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن النقطتين ا ٬ اَ واقعتان على منحنى قطع زائد متحد مع المنحنيين المذكورين فى البور

(٧٢) اذا فرضت جملة قطاعات مخروطية متحدة فى البور ثم رسم مستقيم من احدى البور ليقطع هذه المنحنيات فالمطلوب البرهنة على أن المماسات لهذه المنحنيات فى نقط التقاطع تمس جميعها قطعا مكافئا ثابتا.

(٧٣) اذا فرض أن ط ن ، ط نَ مماسان متعامدان لقطع ناقص وأن ط ر ، ط رَ مماسان لقطع ناقص آخر داخل الاول ومتحد معه فى البور فالمطلوب البرهنة على أن النقط ر ، رَ ، ك ، كَ واقعة على محيط دائرة مع فرض أن ك ، كَ هما نقطتا تقاطع المستقيمين ن رَ ، نَ ر مع المستقيمين ن ر ، نَ رَ على التناظر

(٧٤) اذا رسم من نقطة ثابتة مثل ط المماسان ط ن ، ط نَ لأحد جملة منحنيات قطاعات مخروطية متحدة فى البور فالمطلوب البرهنة على أن محيط الدائرة ط ن نَ يمر بنقطة ثابتة أخرى

(٧٥) اذا فرض أن ن ، نَ نقطتان حيثما اتفق على منحنى قطع ناقص بورتاه ب ، بَ وأن ن ب ، نَ بَ يتقاطعان فى م وأن ن بَ ، نَ ب يتقاطعان فى ه وأن المماسين فى ن ، نَ يتقاطعان فى ط فالمطلوب البرهنة على أن م ، ه واقعتان على منحنى قطع زائد متحد مع المنحنى المذكور فى البور وأن ط ه ، ط م مماسان للقطع الزائد المذكور

الفصل الخامس

قطاعات المخروط

١٢١ — تعريف — السطح الذى يتولد من حركة خط مستقيم مارّ بنقطة ثابتة مثل نقطة ف بحيث يمرّ على الدوام بنقط محيط دائرة مستويها عمود على المستقيم الواصل بين مركزها ح ونقطة ف يسمى (مخروطا دائريا قائما) . وتسمى نقطة ف (رأس) هذا المخروط . والمستقيم ح ف (محوره)

١٢٢ — اذا قُطع مخروط دائرى قائم بمستو فخط التقاطع هو دائما قطاع مخروطى

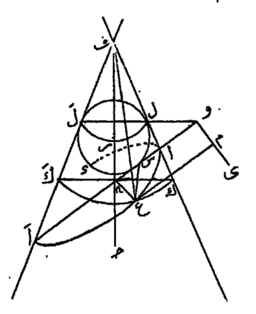
فمن الواضح أنه اذا قُطع المخروط المذكور بمستو عمود على محوره فخط التقاطع يكون دائرة

لنفرض ء ا ع مستو ا قاطعا أيا كان ولنفرض أن مستوى الرسم يشتمل على محور المخروط ف ح وأن مستوى الرسم المذكور عمود على المستوى القاطع وأن ف ك ، ف كَ هما راسما المخروط الموجودان فى مستوى الرسم

ثم نفرض أن المستوى القاطع يقطع المستوى ك ف ك فى الخط ا س ى

واذا فيمكن رسم كرة مركزها هو مركز الدائرة التى تمس المستقيمات الثلاثة ف ك ، ف كَ ، ا ى وتمس المستوى ء ا ع فى نقطة مثل نقطة س على ا ى وتمس المخروط فى دائرة مثل ل ر لَ بفرض ان ل لَ هو قطر الدائرة فى مستوى الرسم

لنفرض و ى خط تقاطع المستوى القاطع بمستوى تماس المخروط بالكرة فحيث ان هذين المستويين عمودان على مستوى الرسم فيكون الخط و ى عمودا على مستوى الرسم واذا فهو عمود على الخط ا سـ ة



ثم نرسم من نقطة مّا على المنحنى ذ ا ع مثل نقطة ع مستويا عمودا على محور المخروط ونفرض ان هذا المستوى يقطع الخط ا سـ ة فى نقطة ة ويقطع المخروط فى الدائرة ك ع كَ فيكون ع ة عمودا على ا سـ ة واذا فهو موازٍ للمستقيم و ى

ثم نصل ع سـ وننزل ع م عمودا على و ى

فاذا فرض أن ع ف يقطع الدائرة ل ر لَ فى نقطة ر يكون ع سـ و ع ر مماسين للكرة واذا فهما متساويان وكذلك يكون ع م و ة مستطيلا واذا ع م = ة و

ومن هنا يكون سـ ع : ع م = ع ر : ة و

= ك ل : ة و

= ا ل : ا و

= ا سـ : ا و

وبناء عليه فالمنحنى د ا ع هو قطاع مخروطى بورته نقطة س ودليله و ى

ويكون القطاع المخروطى المذكور قطعا ناقصا أو مكافئا أو زائدا على حسب ما اذا كان ا س أو ا ل أصغر أو مساويا أو أكبر من ا و أى على حسب ماذا كانت الزاوية ل و ا أصغر أو مساوية أو أكبر من الزاوية ا ل و أو الزاوية ل لَ ف واذا فيكون المنحنى قطعا ناقصا او زائدا على حسب ماذا كان المستوى القاطع يقطع ك ا ، كَ اَ فى نقطتين فى جهة واحدة أو فى جهتين مختلفتين من الرأس ف ويكون قطعا مكافئا اذا كان المستوى القاطع موازيا لأحد رواسم المخروط

نتيجة ١ — خطوط تقاطع أى مخروط دائرى قائم معلوم بمستويات متوازية هى قطاعات مخروطية متساوية فى الاختلاف المركزى

نتيجة ٢ — الزاوية الواقعة بين الخطين التقاربيين للقطاع الزائدى لمخروط دائرى قائم تساوى الزاوية الواقعة بين المستقيمين اللذين يحدثان من قطع هذا المخروط بمستو مواز للقطاع المذكور ومار بالرأس

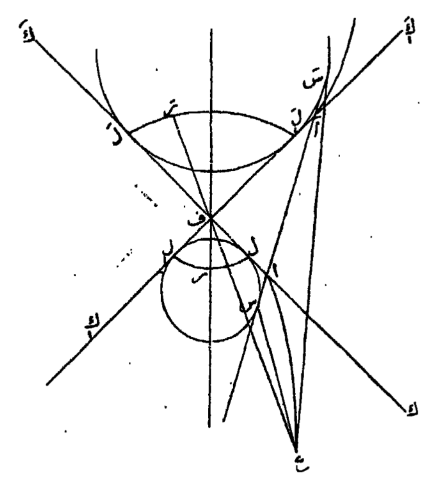
١٢٣ — وهناك برهان آخر على أن خط تقاطع مستو بمخروط دائرى قائم هو قطاع مخروطى ولكن هذا البرهان يشترط فيه أن لايكون المستوى القاطع موازيا لأحد رواسم المخروط

لنفرض أن مستوى الرسم يشتمل على محور المخروط وانه عمود على المستوى القاطع وان ك ف كَ ، ك١ ف ك١َ هما راسما المخروط الموجودان بمستوى الرسم

وحيث انه مفروض ان خط تقاطع المستوى القاطع بالمستوى ك ف ك١ غير مواز لأحد الراسمين ك كَ ، ك١ كَ فيلزم أن يقطعهما فى نقطتى ا ، ا١ على التناظر

فيمكن رسم كرتين تمس كل منهما المستوى القاطع فى نقطة ما على المستقيم ا اَ وتمس المخروط فى دائرة مستويها عمود على محور المخروط [ومراكز الكرتين هما مركزا دائرتين فى المستوى ك ف ك١ ومماستين للمستقيمات الثلاثة ا ف ، اَ ف ، ا اَ]

ثم نفرض س ، سَ نقطتى تماس الكرتين بالمستوى القاطع ونفرض ان ل ر ل١ ، لَ رَ لَ١ هما دائرتا تماس الكرتين بالمخروط



ثم نفرض ع نقطة ما على خط التقاطع ونصل ع س ، ع سَ ، ع ف ونفرض أن ع ف يقطع دائرتى تماس الكرتين فى نقطتى ر ، رَ على التناظر

فيكون ع س = ع ر لانهما مماسان لكرة واحدة

وكذلك ع سَ = ع رَ

واذا فاذا كان ا ، اَ فى جهة واحدة من الرأس يكون

ع سـ + ع سـَ = ىـ ىـَ

واذا كان ا ، اَ فى جهتين مختلفتين من الرأس (كما فى الشكل) يكون

ع سـ ∼ ع سـَ = ىـ ىـَ *

ولكن من الواضح ان ف ىـ ، ف ىـَ ثابتان وحينئذ يكون ىـ ىـَ ثابتا

واذا لخط التقاطع بالمستوى هو قطاع مخروطى بورتاه نقطتا تماس الكرتين اللتين يمكن رسمهما داخل المخروط مماستين لمستوى التقاطع

١٢٤ — واضح من الشكل المرسوم ببند ١٢٢ أن

اَ ف — ا ف = اَ لَ — ا ل = اَ سـ — ا سـ = سـ سـَ

وكذلك واضح من الشكل المرسوم ببند ١٢٣ أن

اَ ف + ا ف = ا لَ + ا ل = اَ سـ + ا سـ

وحينئذ فرأس المخروط الدائرى القائم المار ذلك الرأس بقطع ناقص (أو زائد) معلوم يلزم أن يكون على قطع زائد (أو قطع ناقص) فى مستو عمود على مستو المنحنى المعلوم ومار بمحوره القاطع وبورتاه هما رأسا القطع الناقص (أو الزائد) المعلوم ورأساه هما البورتان

وبالعكس اذا فرض أن ا اَ هو المحور القاطع لقطع ناقص (أو زائد) معلوم و سـ ، سـَ هما البورتان ، ف نقطة ما على القطع لزائد (أو الناقص) الذى مستويه عمود على مستوى المنحنى المعلوم وبورتاه هما نقطتا ا ، اَ ومحوره القاطع هو سـ سـَ يلزم أن يوجد مخروط دائرى قائم راسه نقطة ف مارًا بالمنحنى المعلوم

* ∼ هذه العلامة تدل على الفرق بين الكميتين بدون بيان أيهما هو الاكبر

لأن خط تقاطع مستوى المنحنى المعلوم بالمخروط الدائرى القائم الذى راسماه هما ف ا ، ف اَ هو قطاع مخروطى محوره القاطع هو المستقيم ا اَ وحيث ان ف اَ ــ ف ا = اَ سـ ــ سـ ا = ا سـَ ــ سـَ ا فينتج أن سـ ، سـَ هما بورتا هذا القطاع بحيث يكون القطاع المذكور هو نفس المنحنى المعلوم

[واذا كان المنحنى المعلوم قطعا مكافئا رأســه نقطة ا و بورته سـ تكون ا ى نقطة مثل ف على قطع مكافئ آخر بورته نقطة ا ورأسه سـ ومستويه عمود على مستوى القطع المكافئ المعلوم هى رأس مخـروط دائرى قائم مار بالقطع المكافئ المعلوم]

(واذا فيمكن ان يمر عدد لانها من المخاريط الدائرية القــائمة بأى قطاع مخروطى معلوم)

١٢٥ ــ لنفرض ف رأس أحد المخاريط الدائرية القائمـة التى تمــر بمنحن معلوم ولنفرض أن ع ن وترمافى المنحنى المعلوم مار بنقطة ثابتة ك ثم نفرض أن الراسمين ف ع ، ف ن للمخروط يقطعان قطاعا دائريا ثابتا فى نقطتى عَ ، نَ فواضح أن عَ نَ يمر بنقطة ثابتــة مثل نقطة كَ التى هى نقطة تقاطع ف ك بمستوى القطاع الدائرى ثم اذا فرض أن المستقيمين اللذين يمسان المنحنى المعلوم فى ع ، ن يتقاطعـان فى نقطة ط يكون المستويان ف ع ط ، ف ن ط مستويين مماسين للمخروط ويقطعهما القطاع الدائرى فى الخطين المماســين عَ طَ ، نَ طَ ويكون ف ط طَ خطا مســتقيما وهو خط تقاطع المستويين المماسين للمخروط فى نقطتى ع ، ن او فى نقطتى عَ ، نَ

وواضح أنه اذا مرت جملة أوتار فى دائرة بنقطة ثابتة فالمماسات المرسومة من نهاياتها تتقاطع على مستقيم ثابت

واذا فالمحل الهندسى انقطة طَ للاوضاع المختلفة للوتر عَ ىَ هوالمستقيم وَ ىَ وحيث ان ف ط طَ هو خط مستقيم فتكون نقطة ط على الدوام فى المستوى ف وَ ىَ وهى أيضا فى مستوى المنحنى المعلوم واذا فالمحل الهندسى لنقطة ط هو خط مستقيم

واذا فاذا تقاطعت جملة أوتار لأى قطاع مخروطى فى نقطة ثابتة فالماسات المرسومة من نهاياتها تتقاطع على مستقيم ثابت [أنظر بند ١١٢]

١٢٦ تعريف — السطح الذى يتولد من حركة مستقيم بحيث يكون عمودا على الدوام على مستوى دائرة معلومة ويكون دائمـا مارا بمحيط هذه الدائرة يسمى (اسطوانة دائرية قائمة) ويسمى المستقيم المقام من مركز الدائرة عمودا على مستويها (محور الاسطوانة)

ومن ذلك نرى أن الاســطوانة الدائرية القائمة هى الوضع النهائى لمخروط دائرى قائم رأسه بعيدة عن القاعدة بعدا لانهائيا

و واضح أن كل القطاعات التى تنشأ من قطع الاسطوانة بمستويات عمودية على محورها هى دوائر متساوية وواضح أيضا أن القطاع الذى ينشأ من قطعها بمستو مواز للمحور يتركب من خطين مستقيمين متوازيين فاذا كان المستوى الموازى للمحور مماسا للاسطوانة انطبق الخطان المتوازيان وصارا مستقيما واحدا

و يمكن البرهنة بالطريقة المقررة ببند ١٢٣ على أن كل قطاع آخر للاسطوانة هو قطع ناقص بورتاه نقطتا تمـاس الكرتين المرسومتين فى الاسطوانة بحيث يمسان المستوى القاطع

مســائل

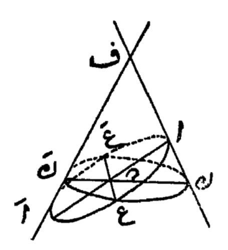
(١) المطلوب ايجاد المحل الهندسى لبور خطوط تقاطع مخروط دائرى قائم بمستويات متوازية

(٢) المطلوب ايجاد أصغر زاوية لمخروط يمكن قطعه بمستو بحيث يكون خط التقاطع قطعا زائدا قائمـا

(٣) المطلوب البرهنة على أن المحور الأصغر لأى قطع ناقص ناشئ من قطع مخروط بمستو هو وسط متناسب بين قطرى الدائرتين الناشئتين من قطع المخروط المذكور بمستويين عموديين على محوره ومارين بنهايتى المحور الأكبر

(٤) المطلوب البرهنة على أن المحاور الصغرى لجميع القطاعات الناقصة التى تنشأ من قطع اسطوانة دائرية قائمة بمستويات هى متساوية

١٢٧ — فى الطريقة المقررة ببند ١٢٢ قد أوجدنا البورة والدليل المناظر لها لكل قطاع مستو للمخروط الدائرى القائم ويمكن البرهنة أيضا على أن خط التقاطع بأى مستو هو قطاع مخروطى بدون احتياج لايجاد البورة أو الدليل ولنفرض أن مستويا قاطعا يقطع المستوى العمودى المار بمحور المخروط فى المستقيم ا اَ بفرض أن نقطتى ا ، اَ فى جهة واحدة من نقطة ف التى هى رأس المخروط



ثم نفرض نقطة اختيارية على المنحنى مثل نقطة ع ونرسم مستويا مارا بها وعمودا على محور المخروط فيقطع ا اَ فى نقطة د

واذا فهذا المستوى يقطع المخروط فى دائرة قطرها هو ك كَ بفرض أن ك ، كَ هما نقطتا تقاطع المستوى بالراسمين ف ا ، ف اَ على التناظر .
وكذلك يكون ك كَ مارا بنقطة د وعمودا على ع د

وحينئذ يكون ع ە٢ = ك ە . ە ك

وحيث ان أضلاع كل من المثلثين ك ە ا ، كَ ە اَ هى فى اتجاهات ثابتة مهما كان وضع نقطة ە فتكون النسبتان ك ە : ا ە ، ە كَ : ە ا ثابتتين واذا فتكون النسبة

ك ە . ە كَ : ا ە . ە اَ ثابتة أيضا

وحينئذ فالنسبة ع ە٢ : ا ە . ە اَ ثابتة لجميع نقط المنحنى و بناء عليه فالمنحنى قطع ناقص

واذا فرض أن ا ، اَ فى جهتين مختلفتين من الرأس يمكن البرهنة بمثل هذا البرهان على أن خط التقاطع بالمستوى هو قطع زائد وأنه فى حالة ما اذا كان المستوى القاطع موازيا لاحد رواسم المخروط يكون خط التقاطع قطعا مكافئا

١٢٨ — النظرية الآتية تعتبر تعريفا عاما للقطاع المخروطى بدلالة البورة والدليل

اذا فرض أن محيط دائرة يمس قطاعا مخروطيا فى نقطتى ع ، عَ اللتين هما نهايتا ضعف الرأسى ع ە عَ للمحور القاطع فان النسبة بين طول المماس لهذه الدائرة من نقطة على المنحنى مثل نقطة ى الى طول العمود النازل من ى على الخط ع عَ تساوى الاختلاف المركزى

لنفرض ف راس مخروط دائرى قائم مارّ بالمنحنى ا ع اَ عَ وأن ا اَ هو المحور القاطع لهذا المنحنى ثم نرسم خط التقاطع الدائرى ل ع لَ عَ المار بنقطتى ع ، عَ بفرض ل ، لَ واقعتين على الراسمين ف ا ، ف اَ على التناظر واذا فيمكن رسم كرة تمس المخروط فى جميع نقط الدائرة ل ع لَ عَ وحينئذ فخط تقاطع الكرة بالمستوى ا ع اَ عَ هو دائرة مماسة للقطاع المخروطى فى نقطتى ع ، عَ

ثم نفرض نقطة اختيارية على المنحنى مثل نقطة ن ونفرض أن خط التقاطع الدائرى المار بنقطة ن يقطع ا اَ فى نقطة م ويقطع ف ا ، ف اَ فى ك ، كَ على التناظر

ونفرض أن ن ف يقطع الدائرة ل ع لَ ع فى نقطة ر

واذا فالمستقيم المرسوم من نقطة ن مماسا للدائرة التى هى خط تقاطع الكرة بالمستوى ا ع اَ عَ يكون مماسا لهذه الكرة واذا فهو مساو للمستقيم ن ر وكذلك يكون العمود النازل من ن على ع عَ مساويا للمستقيم م ه

ولكن ن ر : م ه = ك ل : م ه

= ل ا : ه ا

= ا س : ا و

وبذلك تثبت النظرية

نتيجة — مجموع او فاضل المستقيمين المرسومين من نقطة اختيارية على قطاع مخروطى مماسين لدائرتين تمس كل منهما المنحنى فى نهايتى أى وتر عمود على المحور القاطع هو ثابت

مسائل على الفصل الخامس

(١) المطلوب بيان كيفية قطع مخروط معلوم بحيث يكون خط التقاطع قطعا مكافئا معلوم طول وتره البورى العمودى

(٢) اذا كانت زاوية رأس المخروط قائمة فالمطلوب البرهنة على أن المحور الأكبر لأى قطاع ناقص يساوى الفرق بين نصفى القطرين للكرتين البوريتين

(٣) اذا فرض أن ع ، عَ نهايتا قطر من أقطار قطاع ناقصى أو زائدى لمخروط دائرى قائم فالمطلوب البرهنة على أن مجموع بعدى ع ، عَ عن رأس المخروط ثابت

(٤) اذا فرض أن قطاعين في مخروط دائرى قائم لهما دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين الوترين البوريين العموديين للقطاعين المذكورين تساوى النسبة بين الاختلاف المركزى فيهما

(٥) المطلوب البرهنة على أن المحور الاصغر للقطاع الناقصى في مخروط دائرى قائم هو وسط تناسبي بين قطرى الكرتين البوريتين

(٦) المطلوب البرهنة على أن الوتر البورى العمودى لأى قطاع مستو في مخروط دائرى قائم معلوم يتغير بتغير العمود النازل من رأس المخروط على مستوى القطاع

(٧) اذا فرض ان قطاعين مختلفين في مخروط لهما دليل مشترك فالمطلوب البرهنة على أن الخط الواصل بين بورتيهما يمر برأس المخروط

(٨) المطلوب البرهنة على أنه يمكن ايجاد قطاعين ناقصيين لمخروط معلوم تكون بورة كل منهما نقطة معلومة في المخروط

(٩) اذا رسم مخروطان مماسان لكرتين معلومتين فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين الاختلافين المركزيين للمنحنيين الناشئين من قطع المخروطين بأى مستو هى ثابتة

(١٠) المطلوب البرهنة على أن محور المخروط الدائرى القائم الذى أحد قطاعاته المستوية منحن معلوم ذو مركز هو مماس لمنحن ذى مركز أيضا ويكون هذا المنحنى قطعا ناقصا أو زائدا على حسب ما اذا كان المنحنى المعلوم قطعا زائدا أو ناقصا

(١١) اذا قطع مخروط دائرى قائم بمستويات عمودية على مستو معلوم مشتمل على محور المخروط فنشأ من التقاطع قطاعات ناقصة وكانت محاورها الصغرى ذات طول ثابت فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز هذه القطاعات هو قطع زائد

(١٢) اذا فرض مخروطان مشتركان فى الرأس ومحوراهما متعامدان وزاويتا رأسيهما متكاملتان وقطعهما بمستو عمود على مستوى المحورين. فالمطلوب البرهنة على أن بعدى احدى بورتى القطاع الناقصى عن بورتى القطاع الزائدى يساويان بعدى رأس القطع الناقص عن رأس المخروط

(١٣) المطلوب البرهنة على أنه اذا قطع مخروط دائرى قائم بجملة مستويات مارة بنقطة واحدة على المحور فالمحل الهندسى لمراكز منحنيات القطاعات هو السطح المتولد من دوران قطع زائد حول محوره القاطع

(١٤) اذا فرض أن الوتر البورى العمودى لقطاع مستو فى مخروط دائرى قائم مفروض هو ذو طول معلوم فالمطلوب البرهنة على أن بورتى هذا المنحنى واقعتان على السطح المتولد من دوران قطع زائد حول محوره القاطع

(١٥) اذا فرض أن ك ، كَ مركزا كرتين مرسومتين فى مخروط دائرى قائم مماستين لمستو حيثما كان فالمطلوب البرهنة على أن الكرة التى قطرها ك كَ تمر بالدائرة الاصلية لمنحنى تقاطع المخروط بهذا المستوى

(١٦) المطلوب البرهنة على أن دائرة الاستدلال لأى قطاع مستو فى مخروط هى واقعة على الكرة المارة بدائرتى تماس الكرتين البوريتين

(١٧) المطلوب البرهنة على أن الاسطوانة القائمة التى قاعدتها قطع ناقص معلوم يمكن قطعها بطريقتين بحيث يكون منحنى التقاطع محيط دائرة وأنه يمكن على الدوام رسم كرة تمر بأى قطاعين دائريين غير متوازيين

(١٨) اذا تولد سطح من دوران قطع ناقص حول محوره الأكبر ورسم مستو ليقطع هذا السطح ويمس فى نقطة س كرة مرسومة فيه فالمطلوب البرهنة على أن منحنى التقاطع هو قطع ناقص بورته س

(١٩) المطلوب البرهنة على أن مراكز القطاعات الناقصية لمخروط دائرى قائم والتى محاورها الكبرى متساوية الطول هى واقعة على السطوح المتولدة من دوران قطع ناقص حول أحد محوريه

(٢٠) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لرؤوس مخاريط دائرية قائمة مارّة بقطاع مخروطى هو قطاع مخروطى من النوع الآخر وفى مستو عمودى على مستوى المنحنى المعلوم ورأساه هما بورتا المنحنى الاول وبورتاه هما رأسا المنحنى الاول والمطلوب استنتاج أن مجموع أو فاضل بعدى نقطة متحركة فى أحد هذين المنحنيين عن أى نقطتين ثابتتين فى المنحنى الآخر هو ثابت

تم الجزء الأول بحمد الله وحسن عنايته
و يليه الجزء الثانى

(المطبعة الأميرية ٣٨٨٤ و ٣٨٨٦/١٩٢٤/٦٥٠)


Bibliotheca Alexandrina
05558562